

Obsah

| | |
|---|----|
| Obsah | 1 |
| 1 Úvod | 4 |
| 2 Rozdělení práce, základní geometrické pojmy | 5 |
| 2.1 Rozdělení práce | 5 |
| 2.2 Základní geometrické pojmy | 6 |
| 3 Triangulace | 8 |
| 3.1 Definování pojmu triangulace, její vlastnosti..... | 8 |
| 3.2 Kritéria posuzování kvality triangulace | 9 |
| 3.2.1 Tvarová kritéria | 9 |
| 3.2.2 Ostatní kritéria | 12 |
| 3.3 Optimální triangulace | 13 |
| 3.4 Delaunyova triangulace | 14 |
| 3.4.1 Definice Voronoiova diagramu a Delaunyovy triangulace | 14 |
| 3.4.2 Vlastnosti Delaunyovy triangulace | 16 |
| 3.4.3 Vlastnosti Voronoiova diagramu | 16 |
| 3.4.4 Možnosti použití Voronoiova diagramu v GIS | 18 |
| 4 Přehled triangularizujících algoritmů | 20 |
| 4.1 Obecné triangularizační metody | 20 |
| 4.1.1 Intuitivní přístup | 20 |
| 4.1.2 Nenasatná triangulace | 20 |
| 4.1.3 Vázaná triangulace | 21 |
| 4.1.4 Triangularizace polygonální oblasti | 21 |
| 4.1.4.1 Triangularizace konvexního polygonu | 21 |
| 4.1.4.2 Triangularizace monotónního polygonu | 22 |
| 4.1.4.3 Triangularizace jednoduchého polygonu | 22 |
| 4.1.4.4 Triangularizace obecného polygonu | 22 |
| 4.2 Algoritmy konstrukce Delaunyovy triangulace | 22 |
| 4.1.1 Rozdělení | 23 |
| 4.1.1.1 Nepřímé metody | 23 |
| 4.1.1.2 Přímé metody | 23 |
| 4.1.2 Konstrukce Voronoiova diagramu | 24 |

| | | |
|---------|--|----|
| 4.1.3 | Konstrukce Voronoiova diagramu metodou rozděl a panuj | 25 |
| 4.1.4 | Přírůstková metoda konstrukce Voronoiova diagramu | 26 |
| 4.1.5 | Tvorba Delaunyovy triangulace pomocí Voronoiova diagramu a nalezení konvexní obálky | 27 |
| 4.1.6 | Inkrementální vkládání - Delaunyova přírůstková triangularizace | 27 |
| 4.1.7 | Inkrementální konstrukce | 28 |
| 4.1.8 | Metody včlenění do vyšší dimenze | 29 |
| 4.1.9 | Algoritmus rozděl a panuj pro konstrukci Delaunyovy triangulace | 29 |
| 4.1.10 | Omezená Delaunyova triangulace | 30 |
| 5 | Datové struktury pro triangulace v rovině | 32 |
| 6 | Programové řešení | 33 |
| 6.1 | Popis programů | 33 |
| 6.2 | Výstupy programů | 33 |
| 7 | Digitální model terénu a rekonstrukce | 35 |
| 7.1 | Vymezení pojmů DMT a rekonstrukce | 35 |
| 7.2 | Zdroje dat | 36 |
| 7.3 | Datové reprezentace | 36 |
| 7.3.1 | Rastrové modely terénu | 37 |
| 7.3.2 | Nepřavidelné trojúhelníkové sítě – TIN | 38 |
| 7.3.3 | Vrstevnicové modely terénu | 40 |
| 7.3.4 | Převody mezi jednotlivými reprezentacemi modelů terénu | 40 |
| 7.3.4.1 | Převod rastr – TIN | 40 |
| 7.3.4.2 | Převod vrstevnice - TIN | 42 |
| 7.4 | Základní analýzy nad TIN | 43 |
| 7.5 | Rekonstrukce terénu | 43 |
| 8 | Užití triangulace na problematiku transformace nehomogenních souřadnic | 47 |
| 8.1 | Zadání | 47 |
| 8.2 | Data | 47 |
| 8.2.1 | Vznik a přesnost vstupních dat | 47 |
| 8.2.2 | Popis vstupních dat | 49 |

| | | |
|---------|--|----|
| 8.3 | Barycentrické souřadnice | 51 |
| 8.4 | Jednotlivé kroky řešení problému | 51 |
| 8.4.1 | Uvedení do problému | 51 |
| 8.4.2 | Příprava dat | 51 |
| 8.4.3 | Triangularizace | 52 |
| 8.4.4 | Výpočet opravy | 53 |
| 8.4.4.1 | Funkce $z = \text{bod_chyba}(p1, p2, p3)$ | 53 |
| 8.4.4.2 | Funkce $[x1, x2, x3] = \text{barycentr}(p1, p2, p3)$ | 54 |
| 8.4.4.3 | Funkce $d = \text{d_bod_primka}(s, a, x)$ | 54 |
| 8.4.4.4 | Funkce $k = \text{bod_troj}(p1, p2, p3, x)$ | 54 |
| 8.4.4.5 | Funkce $d = \text{vzdalenost}(x, y)$ | 55 |
| 8.4.4.6 | Funkce $[\text{ano}, \text{ne}, p] = \text{vypocet}(x, y)$ | 55 |
| 8.4.4.7 | Funkce $\text{zobraz}(\text{ano}, \text{ne}, p, x, y)$ | 55 |
| 8.4.5 | Možnosti vstupu | 56 |
| 8.4.5.1 | Funkce $g = \text{linie}(x1, x2, x, \text{krok})$ | 56 |
| 8.4.5.2 | Funkce $g = \text{polygon}(z, x, \text{krok})$ | 56 |
| 8.5 | Zhodnocení přesnosti | 56 |
| 9 | Přehled www stránek s problematikou triangulací a DMT | 58 |
| | Závěr | 60 |
| | Literatura | 62 |

Přílohy

1 Úvod

V geografických informačních systémech se využívá triangulací zejména při tvorbě digitálního modelu terénu. Nepravidelné trojúhelníkové sítě (TIN – *triangulated irregular network*) doplněné o výškovou složku jsou vhodnou strukturou pro možnost použití při rekonstrukci terénu. Metody triangularizace jsou voleny podle druhu zpracovávaného problému. Záleží na tom, zda potřebujeme do triangulace zahrnout povinné hrany (např. spádnice, údolnice), má-li být metoda schopna bez většího vlivu na své okolí přijmout další body a na vlastnostech, které požadujeme od trojúhelníků, které ji tvoří. Většina současných GISů používá Delaunayovu triangulaci, které je věnována značná část této práce. Jejím přímkovým duálem je Voronoiův diagram. Na této vlastnosti jsou založeny nepřímé metody triangularizace. Kromě toho se však v GISech využívá mnoha metod, ve kterých se pracuje nad samotným Voronoiovým diagramem (řešení poštovního problému, nalezení konvexní obálky, nejbližšího bodu).

2 Rozdělení práce, základní používané pojmy

2.1 Rozdělení práce

Práce je rozdělena do šesti hlavních kapitol. V úvodní části je pohled na triangulace a jejich využití v geografických informačních systémech. Následují definice základních geometrických pojmů, používaných v ostatních kapitolách.

Dostáváme se k pojmům triangulace, triangularizace, lokálně a globálně optimální triangulace. Jsou uvedena kritéria, podle kterých se tato optimálnost posuzuje. Dále se dostáváme k pojmům Voronoiova diagram a Delaunyova triangulace, jejich definicím a vlastnostem.

V kapitole o triangularizujících algoritmech se nejprve zabývám obecnými metodami triangularizace. Začínám hypotetickým intuitivním algoritmem a nenasatnou triangulací. Jako příklad metody pro vytvoření omezené triangulace uvádím její modifikaci. Pokračuji popisem triangularizace polygonu. Hlavní částí je podkapitola věnovaná tvorbě Delaunyovy triangulace a Voronoiova diagramu. Závěrem zmiňuji některé datové struktury vhodné pro triangulaci.

Následuje popis dvou funkcí realizovaných v prostředí jazyka MATLAB v.5.1. a některé jejich výstupy. Jedná se o funkce greedy (nenasatná triangulace) popsané v první části předchozí kapitoly a jeden příklad algoritmu Delaunyovy triangulace.

Dále je shrnuta problematika tvorby digitálního modelu terénu (DMT) a možnosti jeho uplatnění při rekonstrukci terénu. V úvodu formuluji základní pojmy a uvádím možné zdroje dat. Uvádím základní reprezentace modelu terénu, jejich srovnání a některé metody jejich převodu. Zaměřuji se zde především na reprezentaci pomocí TINu. Uvádím základní operace nad DMT. Kapitola o rekonstrukci se zamýšlí nad možnostmi tvorby DMT z rovinné triangulace doplněné o další metrické informace potřebné k převodu na výškovou složku (tj. šikmé vzdálenosti a výškové popř.zenitové úhly).

Praktickou částí diplomové práce bylo využití triangulace při transformaci nehomogenních souřadnic. K dispozici jsem dostal tři seznamy souřadnic. V prvních dvou byly identické body známé v obou soustavách (body transformované z S-SK a body v S-JTSK). Tato data byla použita při transformaci bodů třetího seznamu. Výstupem je seznam opravených bodů. Pro výpočet opravy každého bodu bylo využito

chyb ve vrcholech trojúhelníku Delaunayovy triangulace, v němž transformovaný bod ležel. Byly zjištěny barycentrické souřadnice tohoto bodu a použily se jako váhy pro chyby v příslušných vrcholech. Z definice triangulace plyne, že bylo možno transformovat pouze body ležící v konvexní obálce vstupní množiny. Proto je výstupní seznam transformovaných opravených bodů kratší o body ležící vně konvexní obálky (tyto body jsou uvedeny v dalším seznamu souřadnic).

Poslední částí je komentovaný souhrn nejzajímavějších odkazů www stránek zabývajících se tématikou této práce a seznam literatury.

V přílohách jsou uvedeny ukázky výstupů implementací a obsah přiložené diskety.

2.2 Základní geometrické pojmy

Definice 2.1 d -rozměrný **euklidovský prostor** je čtveřice $E_d = (B, V, \cdot, -)$, kde B je neprázdná množina (množina bodů prostoru), V je vektorový prostor dimenze d nad \mathbf{R} se skalárním součinem \cdot a $-$ je zobrazení $B \times B$ do V

(značíme $-(Y, X) \equiv X - Y, X, Y \in B$) splňující:

1. $(Z - X) + (Y - X) = Z - X, X, Y, Z \in B,$
2. pro každý $p \in B$ je $X \rightarrow X - p$ vzájemně jednoznačné zobrazení B na V .

Definice 2.2 **Bod** Vektor $p = (x_1, \dots, x_d)$ označuje bod p v E_d .

Definice 2.3 **Přímka** Jsou dány dva odlišné body q_1 a q_2 v E_d . Lineární kombinací $\alpha q_1 + (1-\alpha) q_2$ je přímka v E_d .

Definice 2.4. **Úsečka** Jsou dány dva odlišné body q_1 a q_2 v E_d . Přidáme-li k výrazu $\alpha q_1 + (1-\alpha) q_2$ podmínku $0 \leq \alpha \leq 1$, dostaneme úsečku spojující dva body q_1 a q_2 :
 $\alpha q_1 + (1-\alpha) q_2 \quad (\alpha \in \mathbf{R}, 1 \geq \alpha \geq 0)$

Definice 2.5 **Konvexní oblast** Oblast D v E_d je konvexní, jestliže pro každé dva body q_1 a q_2 v D platí, že úsečka $q_1 q_2$ leží celá v oblasti D .

Definice 2.6 **Konvexní obálka** Konvexní obálka množiny bodů S v E_d je hranice obklopující nejmenší konvexní oblast v E_d obsahující celou množinu S .

Definice 2.7 Mnohoúhelník (polygon) V E_2 je polygon definován jako konečná množina úseček tak, že každý koncový bod úsečky je sdílen právě dvěma hranami polygonu a v žádných dvou podmnožinách hran polygonu se žádná hrana neopakuje. Počet vrcholů a hran je stejný.

Definice 2.8 Jednoduchý polygon Polygon je jednoduchý, jestliže žádné dvě po sobě nejdoucí hrany nesdílí společný vrchol. Jednoduchý polygon rozděluje rovinu na dvě disjunktní oblasti, vnitřní (ohraničenou) a vnější (neohraničenou), které jsou odděleny polygonem (*Jordan curve theorem*). (Pozn.: termín polygon se často užívá pro označení sjednocení vnitřní oblasti a její hranice). Jednoduchý polygon je konvexní, pakliže je jeho vnitřní oblast konvexní množina.

Definice 2.9 Polygon hvězdicového tvaru Jednoduchý polygon P je hvězdicového tvaru, existuje-li bod z , který neleží vně P takový, že pro všechny body p polygonu P platí, že úsečka zp leží celá uvnitř polygonu P . (To znamená, že každý konvexní polygon je zároveň hvězdicového tvaru.) Oblast, kde se může bod z nacházet se nazývá jádro mnohoúhelníku P . (To znamená, že každý konvexní polygon je sám sobě jádrem.)

Definice 2.10 Rovinný graf Graf $G=G(V, E)$ (V je množina vrcholů, E je množina spojnic mezi těmito vrcholy) je rovinný, může-li být, aniž by došlo k překřížení některých spojnic, zasazen do roviny. Je-li množina E množinou úseček (hran), mluvíme o tzv. přímkovém rovinném grafu, neboli PSLG (*planar straight-line graph*).

3 Triangulace

3.1 Definování pojmu triangulace, její vlastnosti

Existuje několik možných definic pojmu triangulace, závislých na typu zpracovávaných úloh. Patrně nejobecnější je:

Definice 3.1. Triangulace Soubor $T=\{T_i\}$, $i=1, \dots, N_T$ trojúhelníků se nazývá triangulace oblasti Ω , pokud:

- libovolná dvojice trojúhelníků z T se vzájemně protíná nejvýše v jednom společném vrcholu nebo podél společné hrany,
- sjednocení trojúhelníků $\Omega=\{T_i\}$ je souvislá množina ve E_3 .

Podle této definice je množina Ω vždy souvislý polygon, obecně nemusí být konvexní a může obsahovat díry. Pokrývá jak případy, kdy vrcholy trojúhelníka byly získány generováním trojúhelníkové sítě, tak i úlohy, kdy byla množina vrcholů dána předem.

V naší práci se budeme držet níže uvedené definice.

Definice 3.2 Triangulace Necht' je v rovině dáno N bodů. Spojme je neprotínajícími se úsečkami tak, aby každá vnitřní oblast konvexní obálky tvořila trojúhelník. Množinu těchto trojúhelníků nazýváme triangulací.



Obr 3.1: Příklad triangulace množiny bodů podle Definice 2.1 a Definice 2.2

Věta 3.1 Vlastnosti triangulace Jestliže množina $T=\{(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) : \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \{1, \dots, N\}\}$, skládající se z M celočíselných trojic tvoří triangulaci množiny bodů $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, pak platí:

- body $P\alpha_j, P\beta_j, P\gamma_j$ tvoří pro každé j rohy jednoho trojúhelníku,
- každý trojúhelník je definován třemi body množiny T , které jsou současně vrcholy tohoto trojúhelníku,
- průnik vnitřních oblastí T_j, T_k , kde $j \neq k$ je prázdný,
- sjednocení všech trojúhelníků tvoří konvexní obálku bodů množiny P .

Poznámka Triangulace N vrcholů obsahuje maximálně $3N-6$ hran.

Definice 3.3 Triangularizace Proces vedoucí k nalezení soustavy trojic bodů tvořících co možná neoptimálnější trojúhelníkovou síť.

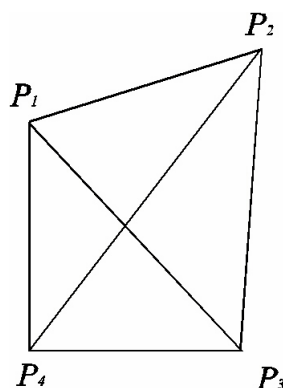
Slovo neoptimálnější tady znamená nejlépe vyhovující dané aplikaci, pro níž je síť tvořena (tvarové vlastnosti trojúhelníků, povinné hrany atd.).

3.2 Kritéria posuzování kvality triangulace

3.2.1 Tvarová kritéria

Nyní se zamysleme nad kritérii, která by měla triangulace splňovat. Kvalitou triangulace se uvažuje splnění a vhodnost daného kritéria pro danou aplikaci.

V rovině jsou dány čtyři různé body P_1, P_2, P_3 a P_4 , pro které platí, že žádné tři z nich neleží na přímce. Triangulaci tohoto jednoduchého případu můžeme provést dvěma způsoby. Otázka zní, jak vybrat ten výhodnější.



Obr. 3.2: Problém výběru diagonály splňující podmínku optima

Poznámka Pro většinu tvarových kritérií se používá takzvaného Min-Max přístupu. Pro úhlová kritéria toto rozdělení mnohdy vede přímo k realizovatelnosti výpočtu (nepočítáme s úhly blízkými nule), u dalších se jedná spíše o analogický přístup bez většího vlivu na průběh výpočtu.

Úhly

Trojúhelníky by neměly mít příliš malé úhly, tj. každý úhel by měl být roven dané (ne příliš malé) konstantě Ω . Tato konstanta nemůže být větší než nejmenší úhel vstupní oblasti, protože vstupním úhlům v síti se nedá vyhnout.

Nejoblíbenější mírou kvality triangulace je velikost nejmenšího úhlu $a(T)$. Zformujme toto kritérium obecněji:

Definice 3.4 Max-Min úhlové kritérium (Lawson) Triangulace T je lepší než triangulace T' (vzhledem k Max-Min úhlovému kritériu), právě tehdy, když platí: $a(T) > a(T')$, $a(T) = \min\{a(T_j): T_j \in T\}$ a $a(T') = \min\{a(T'_j): T'_j \in T'\}$, tj. nejmenší úhel triangulace T je větší než nejmenší úhel triangulace T' .

Nedostatky tohoto kritéria tkví v problémech při zpracování velmi malých úhlů.

Alternativní možností je použití Min-Max kritéria.

Definice 3.5 Min-Max úhlové kritérium (Barnhill, Little) Triangulace T je lepší než triangulace T' (vzhledem k Min-Max úhlovému kritériu), právě tehdy, když platí $a(T) < a(T')$, $a(T) = \max\{a(T_j): T_j \in T\}$ a $a(T') = \max\{a(T'_j): T'_j \in T'\}$, tj. největší úhel triangulace T je menší než největší úhel triangulace T' .

Obvykle lze tato kritéria doplnit o další podmínky, např. že trojúhelníky by neměly mít tupé úhly.

Délky

Definice 3.6 Kritérium nejkratších úhlopříček Triangulace T je lepší než triangulace T' (vzhledem ke kritériu nejkratších úhlopříček) právě tehdy, když platí: $d < d'$, kde d je délka diagonály P_1P_3 triangulace T a d' je délka diagonály P_2P_4 triangulace T' .

Toto kritérium, ač příjemné pro snadnou implementaci, není často využíváno, protože se nevyhýbá generování dlouhých tenkých trojúhelníků, ve většině případů nežádoucích. Z tohoto hlediska jsou výše zmíněná úhlová kritéria výhodnější.

Definice 3.7 Max-Min výškové kritérium Triangulace T je lepší než triangulace T' (vzhledem k Max-Min výškovému kritériu) pokud nejmenší z výšek obou trojúhelníků triangulace T je větší než nejmenší z výšek obou trojúhelníků triangulace T' .

Definice 3.8 Min-Max výškové kritérium Triangulace T je lepší než triangulace T' (vzhledem k Min-Max výškovému kritériu) pokud největší z výšek obou trojúhelníků triangulace T je menší než největší z výšek obou trojúhelníků triangulace T' .

Rádus kritéria (kritéria uvažující poloměry opsaných kružnic)

Definice 3.9 Max-Min rádus kritérium Triangulace T je lepší než triangulace T' (vzhledem k Max-Min rádus kritériu) právě tehdy, pokud platí $r > r'$, $r = \min\{r(t_1), r(t_2)\}$ a $r' = \min\{r(t_1'), r(t_2')\}$, kde je $r(t_i)$ (resp. $r(t_i')$) poloměr kružnice opsané trojúhelníku t_i (resp. t_i') triangulace T (resp. T'), tj. nejmenší poloměr kružnice opsané trojúhelníku v triangulaci T je větší než nejmenší poloměr kružnice opsané trojúhelníku v triangulaci T' .

Definice 3.10 Min-Max rádus kritérium Triangulace T je lepší než triangulace T' (vzhledem k Min-Max rádus kritériu) právě tehdy, když platí $r < r'$, $r = \max\{r(t_1), r(t_2)\}$ a $r' = \max\{r(t_1'), r(t_2')\}$, kde je $r(t_i)$ (resp. $r(t_i')$) poloměr kružnice opsané trojúhelníku t_i (resp. t_i') triangulace T (resp. T'), tj. největší poloměr kružnice opsané trojúhelníku v triangulaci T je menší než největší poloměr kružnice opsané trojúhelníku v triangulaci T' .

Plochy

Definice 3.11 Max-Min obsahové kritérium Triangulace T je lepší než triangulace T' (vzhledem k Max-Min obsahovému kritériu), když nejmenší z obsahů obou trojúhelníků triangulace T je větší než nejmenší z obsahů obou trojúhelníků triangulace T' .

Definice 3.12 Min-Max obsahové kritérium Triangulace T je lepší než triangulace T' (vzhledem k Min-Max obsahovému kritériu), když největší z obsahů obou

trojúhelníků triangulace T je menší než největší z obsahů obou trojúhelníků triangulace T' .

3.2.2 Další kritéria (obvykle globálního charakteru)

Suma délek hran

Velmi náročné je kritérium s požadavkem minimální celkové délky hran, tzv. váhy triangulace. Triangulace dosahující globálního minima dosažitelného na dané množině bodů se nazývá triangulace s minimální váhou (*Minimum Weight Triangulation - MWT*), a patří k obtížným a dosud ne zcela vyřešeným problémům výpočetní geometrie.

Globalita změn

Jak se triangulace chová, dojde-li ke změně přidáním či ubráním bodu? Změní se celá trojúhelníková síť nebo jen blízké a definovatelné okolí příslušného bodu? Globální vliv je spíše nežádoucí. To je však v rozporu s tím, že většina požadovaných kritérií je globální.

Povinné hrany

Je schopna daná metoda včlenit povinné hrany (*constrains*), tj. hrany, které z důvodů daných příslušnou aplikací musí být v triangulaci použity (mohou např. představovat terénní zlomy apod.)?

Přidávání bodů a adaptivita

Přidává daná triangularizační metoda v procesu triangularizace body (tzv. Steinerovy body, Steinerova triangularizace) anebo používá pouze zadanou množinu bodů? Pokud je povoleno přidávání bodů, vede k adaptivitě metody na zadaná vstupní data?

Zachovávání nekonvexity oblasti

Zachová metoda v případě nekonvexní oblasti její tvar, anebo triangularizuje její konvexní obálku? Jinými slovy pracujeme podle Definice 3.1. nebo Definice 3.2.?

Hierarchie

Umí metoda vybudovat hierarchickou triangulaci, tj. je možné volit úroveň „detailu“ trojúhelníkové sítě podle okamžitých potřeb, např. podle vzdálenosti, ze které se na síť díváme? Tento způsob triangularizace se obvykle používá pro takovou vizualizaci dat, kdy má být získaný geometrický model zobrazen při různých rozlišeních.

Rozšiřitelnost do vyšší dimenze

Lze algoritmus upravit i pro triangularizaci závislou na datech, tj. pro případ, kdy budou uvažovány v E_3 ? Existuje analogie, pokud by místo triangulace měla být budována objemová struktura, tj. model skládající se ze čtyřstěnů?

3.3 Optimální triangulace

Pomocí výše uvedených tvarových kritérií pro triangulace čtyřúhelníku lze triangularizovat také větší množiny bodů např. tak, že nejprve provedeme triangulaci první čtveřice bodů a přidáváním dalších nejbližších bodů (např. k jedné straně vzniklého polygonu) se dopracujeme k optimální triangulaci. Na základě těchto kritérií můžeme dojít k lokálně optimálním triangulacím popsaných v následující definici.

Definice 3.13 Lokálně optimální triangulace Triangulace T se nazývá lokálně optimální vzhledem k nějakému kritériu, jestliže každý konvexní čtyřúhelník (složený ze dvou trojúhelníků sdílejících vnitřní hranu triangulace) je optimální vzhledem k tomuto kritériu.

Poznámka Množině bodů může být přiřazeno více lokálně optimálních triangulací.

Ke globálně optimální triangulaci je možné přejít porovnáním uspořádaných M -tic, které vplynuly z lokálních rozhodovacích kritérií: je-li číslo $a(T_j)$ měřítkem (podle výše uvedených kritérií) jakosti trojúhelníku T_j (dlouhý a tenký, nebo rovnostranný), pak můžeme pro každou triangulaci T množiny bodů P definovat uspořádanou M -tici $a(T) = (a_1, \dots, a_m)$ složenou podle velikosti seříděných složek $a_i = a_i(T_j)$.

Kvalita dvou triangulací T a T' nyní může být vyhodnocena porovnáním vektorů $a(T)$ a $a(T')$, takže např. $a(T) < a(T')$ tehdy, když existuje celé číslo k takové, že $a_i = a'_i$ pro $i=1, \dots, k-1$, $a_k < a'_k$.

Dostáváme se k následující definici.

Definice 3.14 Globálně optimální triangulace Triangulace T se nazývá globálně optimální vzhledem k nějakému kritériu tehdy, když pro výše uvedený vektor měřítek $a(T)$ kvality triangulace platí $a(T) \geq a(T')$ pro každou triangulaci T' množiny bodů P .

Globálně optimální triangulace je také lokálně optimální a je jednoznačná (až na případy, kdy vektor měřítek $a(t)$ zůstává konstantní, čímž můžeme získat více globálně optimálních triangulací).

Poznámka Max-Min a Min-Max kritéria často vedou ke stejným triangulacím. Srovnáním výsledků lze ukázat, že počet různě triangulovaných čtyřúhelníků je asi 10%.

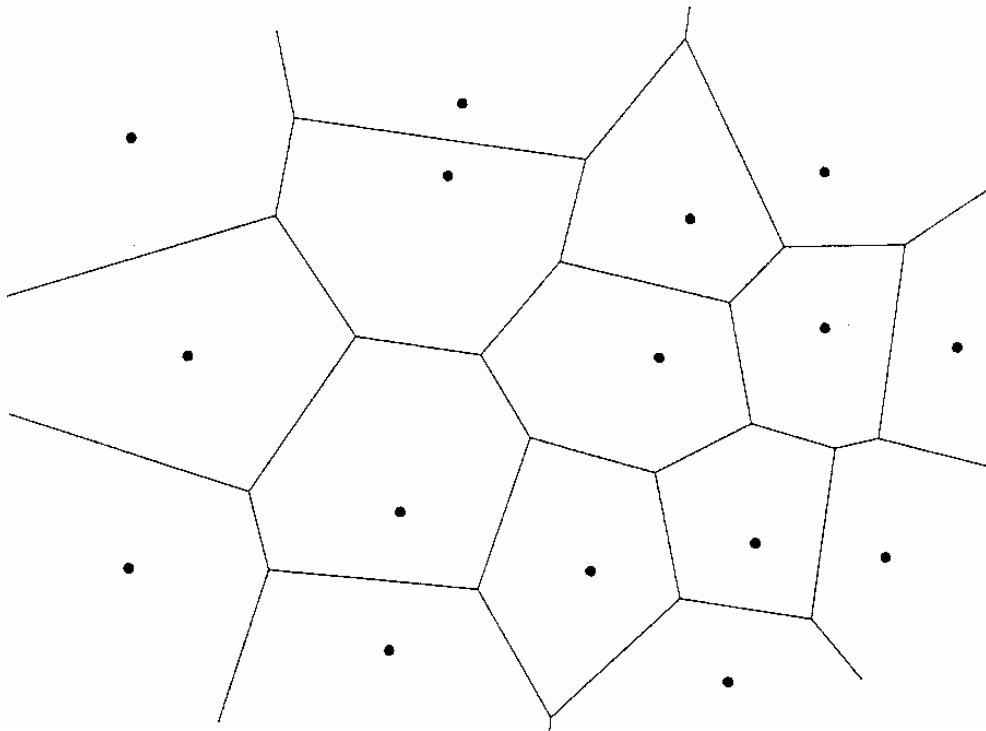
3.4 Delaunyova triangulace

3.4.1 Definice Voronoiova diagramu a Delaunyovy triangulace

Definice 3.15 Voronoioův diagram Necht' $P=(p_1, \dots, p_n)$ je množina bodů nebo polygon v E_2 . Voronoiova oblast R_i je množina všech bodů roviny, které jsou k p_i alespoň tak blízko jako ke kterémukoliv jinému bodu z

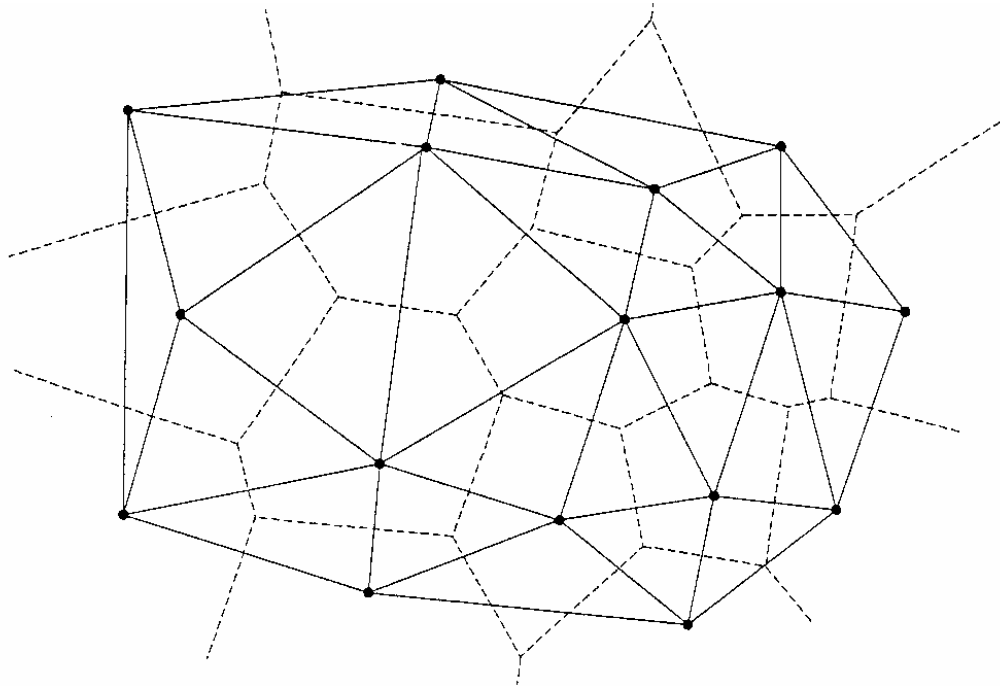
$P: R_i = \{x: |p_j - x| \geq |p_i - x| \forall j \neq i\}$. Voronoioův diagram $Vor(P)$ je pak hranice mezi oblastmi (tj. množina bodů, které mají více než jednoho nejbližšího souseda).

Poznámka Voronoiovy diagramy jsou často v literatuře nazývány také jako Dirichletovy mozaiky nebo Thiessenovy polygony.



Obr. 3.3: Voronoioův diagram

Definice 3.16 Delaunayova triangulace $DT(P)$ je přímkový duál k $Vor(P)$.



Obr. 3.4: Delaunayova triangulace jako přímkový duál Voronoioiva diagramu

Ve většině dostupné české literatury je jako definice uváděno následující tvrzení, které vyplývá z vlastností Voronoiových diagramů. Je však nutné si jej zde uvést, neboť z něj vychází všechny tzv. přímé algoritmy pro vytvoření Delaunayovy triangulace.

Věta 3.2 Delaunayova triangulace $DT(P)$ množiny bodů P daných v E_2 je množina vrcholů a hran (spojujících tyto vrcholy v síť trojúhelníků) takových, že platí:

1. Každý bod množiny P je vrcholem nejméně jednoho trojúhelníku z $DT(P)$ a každý vrchol $DT(P)$ je bodem množiny P .
2. Průnik dvou různých hran $DT(P)$ je buď prázdný, nebo je jím společný vrchol $DT(P)$, tj. žádné dvě hrany $DT(P)$ se nekříží.
3. Pro každé tři vrcholy $V_1, V_2,$ a $V_3 \in DT(P)$ tvořící trojúhelník $T_i \in DT(P)$ platí, že vnitřek kružnice $K(V_1, V_2, V_3)$ opsané trojúhelníku T_i neobsahuje žádný jiný bod množiny P .

Poznámka Triangulace konstruovaná pomocí Lawsonovy metody používající Max-Min úhlového kritéria přináší výsledky odpovídající této definici.

3.4.2 Vlastnosti Delaunyovy triangulace

Úhlové

DT maximalizuje minimální úhel (optimální vzhledem k Max-Min úhlovému kritériu).

DT neminimalizuje maximální úhel.

Jednoznačnost

DT je jednoznačná, pokud žádné čtyři body neleží na kružnici; pokud tato podmínka není splněna, existuje více možností *DT*.

Konvexita

Hranice $DT(P)$ je konvexní obálka P .

Vnitřek trojúhelníků $DT(P)$ neobsahuje žádné body P .

Hrubost terénu

$DT(P)$ minimalizuje hrubost výsledného terénu bez ohledu na skutečnou výšku dat.

MWT kritérium

DT není ani přibližně optimální vzhledem ke kritériu minimální délky hran.

Globalita

Menší změny v síti bodů vedou pouze na lokální změny trojúhelníkové sítě v okolí bodu i když v nepříznivém případě může tato změna vyvolat lavinovité změny v celé síti.

Povinné hrany

DT není schopna včlenit povinné hrany a zachovat nekonvexitu triangularizované oblasti, ale její úpravy to dovolují.

Rozšiřitelnost

DT je rozšiřitelná i do E_3 , kde však má již méně výhodné vlastnosti.

3.4.3 Vlastnosti Voronoiova diagramu

Předpoklad Žádné čtyři body množiny S neleží na jedné kružnici.

Regularita

Každý vrchol Voronoiova diagramu je průnikem právě tří hran tohoto diagramu.

Jinak řečeno, Voronoiovy vrcholy jsou středy kružnic, které jsou dány třemi body množiny S a Voronoiov diagram je regulární třetího stupně.

Poznámka Graf G je regulární, jsou-li všechny jeho vrcholy stejného stupně (tzn. každý vrchol je průnikem stejného počtu hran).

Takovou kružnici se středem na vrcholu v označme $C(v)$.

Opsaná kružnice

Pro každý vrchol v Voronoiova diagramu sestrojeného na množině bodů S platí, že kružnice $C(v)$ neobsahuje jiný bod množiny S .

Hrany Voronoiova diagramu

Každý nejbližší soused vrcholu p_i definuje hranu Voronoiova polygonu $V(i)$.

Konvexní obálka

Polygon $V(i)$ je neohrazen (otevřen) jen a pouze tehdy, když bod p_i je bodem konvexní obálky množiny S .

Jelikož jen neuzavřený (neohraničný) polygon může mít paprsky jako své hrany, pak tyto paprsky oddělují dvojici sousedních bodů konvexní obálky množiny S . Nyní vezměme náš Voronoiov diagram a úsečkou spojme každé dva sousední body tak, že jí protneme hranu společnou příslušným Voronoiovým polygonům. Dostaneme tak planární graf sestrojený na množině bodů S duální k Voronoiovu diagramu.

Dualita

Graf duální k Voronoiovu diagramu je (Delaunyova) triangulace množiny bodů S .

Počet vrcholů a hran

Voronoiov diagram sestrojený na množině N bodů se skládá z nejvýše $2N - 5$ vrcholů a $3N - 6$ hran.

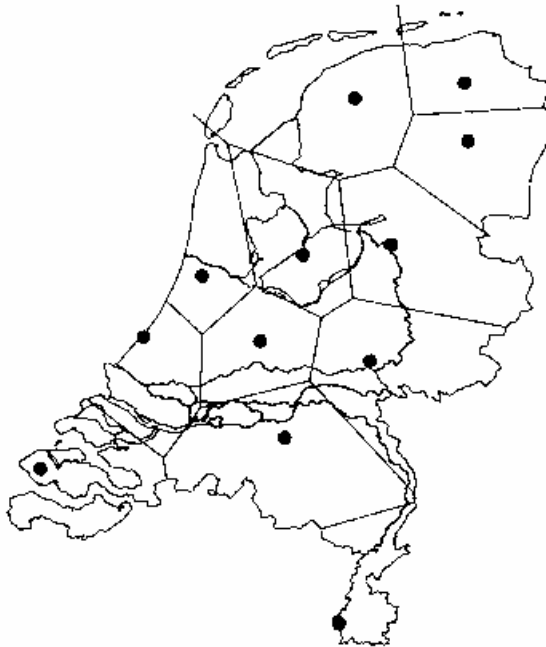
Poznámka Každý Voronoiov polygon může tvořit nejvýše $N - 1$ hran. Protože hran je však celkem nejvýše $3N - 6$ a každá z nich je sdílena právě dvěma polygony, průměrný počet hran Voronoiova polygonu nepřevyšuje číslo šest.

Z toho plyne, že zavedením duality může být použito (jak bylo uvedeno ve třetí kapitole) Voronoiův diagramu pro konstrukci Delaunayovy triangulace.

3.4.4 Možnosti použití Voronoiův diagramu v GIS

Voronoiův diagram je velmi důležitým pojmem výpočtové geometrie a používá se při řešení mnoha problémů. Pomocí Voronoiův diagramu lze snadno určit polohu bodu, sestavit konvexní obálku množiny bodů či využít faktu, že Voronoiův diagram je duální k Delaunayově triangulaci a že je jí tedy ekvivalentní a vytvořit triangulaci.

Praktické využití Voronoiův diagramu je např. řešení tzv. poštovního problému. Slouží nám pro rozdělení většího území na spádové oblasti jednotlivých center.

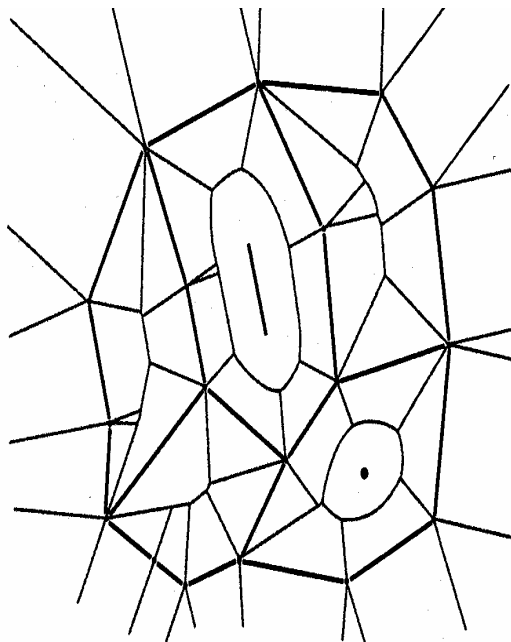


Obr. 3.5: Ukázka řešení poštovního problému – rozdělení Nizozemí na regiony

Po přiřazení vah jednotlivých bodů můžeme sestavit tzv. vážený Voronoiův diagram. Ten nám pomáhá zodpovídat otázky spojené s finančními otázkami, kdy se jako váha může vzít např. kupní síla pro dané sídlo, otázky dostupnosti (kvalita cest) apod..

Kinematické a dynamické Voronoiovy metody pracují s plynule se pohybujícími body. V těchto metodách využíváme toho, že hranice Voronoiovy oblasti definují nejbližší sousedy tohoto bodu. Průchodem bodu a uchováním jeho historie lze zodpovědět např. otázku spojené s tvorbou cestovního itineráře.

Další zajímavé možnosti nabízí Voronoiovy diagramy sestrojené nad jinou než bodovou množinou. Pokud tvoříme diagram definovaný podobně, ale mezi tvořící objekty vložíme např. liniový segment, stává se Voronoiovou hranicí mezi ním a bodovým segmentem parabola (resp. pro větší počet bodů její část), pro dva liniové segmenty jejich osa. Pro kružnice sestrojené ve společném bodě hranic tří oblastí a procházející bodem vstupní množiny platí, že liniové segmenty jsou její tečnou, popř. prochází koncovým bodem. Splňuje také podmínku, že v ní neleží žádný bod vstupní množiny. Tato problematika je důkladně zpracována v [Krev97].



Obr. 3.6: Ukázka Voronoiova diagramu sestrojeného nad souborem bodů a linií

4 Přehled triangularizujících algoritmů

4.1 Obecné triangularizační metody

4.1.1 Intuitivní přístup

Pokud nám nezáleží na kvalitě výsledné sítě ani výpočetní složitosti, můžeme zvolit např. následující intuitivní algoritmus:

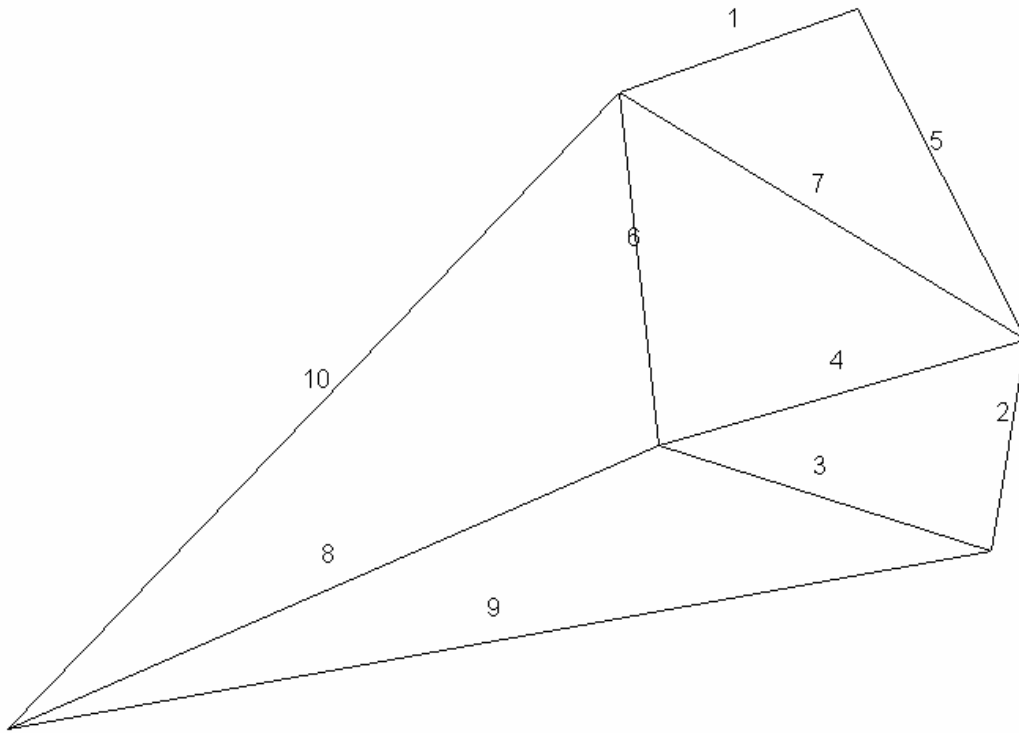
- vytvoř všechny možné spojnice bodů množiny P a vlož je do množiny M ,
- pro každou spojnicí z M proved',
 - pokud svou délkou přesahuje povolenou mez, zruš ji,
 - pokud přetíná spojnicí kratší, zruš ji,
- výsledkem je množina M tvořící triangulaci.

4.1.2 Nenasytná triangulace

Pokud chceme, aby triangulace splňovala některá výše zmíněná kritéria, musíme sáhnout k algoritmům složitějším. Jednoduchým algoritmem je tzv. nenasytná triangulace. Je to algoritmus, který „nikdy nenapraví, co již jednou udělá“. V každém kroku se přidá jedna hrana, proces je ukončen, pokud je počet hran vložených do triangulace roven maximálnímu počtu hran triangulace nebo je vyčerpán seznam hran. Lokální optimum zajišťuje kritérium výběru nejkratší hrany, která nekříží žádnou již zařazenou hranu.

- vytvoř všechny možné spojnice bodů množiny P ,
- seříd' je vzestupně podle délky,
- ulož je do zásobníku hran M ,
- postupně vkládej jednotlivé hrany,
 - pokud hrana neprotíná již zařazenou hranu, zařad' ji,
 - pokud ano, zruš ji,
- konec nastává, pokud je triangulace kompletní (sledováním počtu hran) nebo pokud je zásobník prázdný, výsledkem je množina M tvořící triangulaci.

Nejjednodušší test křížení hran je test vybrané hrany ze zásobníku s každou hranou triangulace. Mnohem efektivnější je řešení pomocí segmentového stromu uvedené např. v [Blaž95] nebo rozdělení na podoblasti v [Koli99].



Obr. 3.1 Postupné vkládání hran v nenasytné triangulaci

4.1.3 Vázaná triangulace

Mnohá z možných řešení problému triangulace mohou mít tzv. vázaný charakter, tj. část množiny hran triangulace může být určena už v samotné formulaci problému.

Pro řešení tohoto problému lze použít právě nenasytné triangulace, povinné hrany se zařadí přímo do množiny M , ostatní hrany se postupně vkládají.

4.1.4 Triangularizace polygonální oblasti

Definice 4.1 Triangularizace polygonu Je dán polygon P o N vrcholech. Jeho triangularizací nazveme proces nalezení $N-3$ diagonál, které polygon P rozdělí na $N-2$ trojúhelníků.

Pokud na polygon P určíme tvarová omezení postup řešení se zjednoduší.

4.1.4.1 Triangularizace konvexního polygonu

Vytvořit triangulaci konvexního polygonu je velmi jednoduché. Libovolný vrchol konvexního polygonu může být spojen diagonálou se všemi ostatními nesousedícími vrcholy bez dalšího testování.

4.1.4.2 Triangularizace monotónního polygonu

Monotónnost rozumíme vzhledem ke přímce. Nejprve si nadefinujeme monotónní polygonální řetězec a monotónní polygon.

Definice 4.2 Monotónní polygonální řetězec Polygonální řetězec C je monotónní vzhledem k přímce l , pokud každá přímka l' kolmá k l protíná C nejvýše v jednom bodě.

Definice 4.3. Monotónní polygon Polygon P je monotónní vzhledem k přímce l , jestliže lze jeho hranici rozdělit na dva polygonální řetězce, které jsou monotónní vzhledem k l .

Monotónnost značně usnadňuje triangularizaci. V algoritmech se obvykle předpokládá monotónnost vůči některé souřadné ose, např. y . Triangularizace polygonu monotónního vzhledem k y probíhá přibližně takto: vrcholy se setřídí podle souřadnice y sestupně. Směrem odshora se odřezávají trojúhelníky tak, že aktuální vrchol se spojuje s těmi vrcholy, které je možno spojit bez protnutí některé hrany polygonu („je na ně vidět“) a mají menší y souřadnici .

4.1.4.3 Triangularizace jednoduchého polygonu

Jednoduchý polygon lze rozdělit na dvě části diagonálou a části rekurzivně triangularizovat. Aby se diagonála dala použít pro triangularizaci, musí ležet uprostřed polygonu a neprotínat žádnou jeho hranu (ani ve vrcholu). Volbu diagonály musíme testovat na průsečíky; test, zda leží uvnitř, stačí provést v počátku.

4.1.4.4 Triangularizace obecného polygonu

Pokud polygon nespĺňuje podmínku jednoduchosti (např. obsahuje díry), situace se dále komplikuje. Oblast se obvykle rozdělí na jednoduché polygony, které se postupně triangularizují. Popis těchto algoritmů je v [Koli99].

4.2 Algoritmy konstrukce Delaunayovy triangulace

V oblasti GISů se díky svým vlastnostem hojně využívá Delaunayova triangulace a Voronoiovy diagramy. Pro řešení praktické části byla využita právě implementace této metody. Proto je metodám její konstrukce věnována celá zvláštní kapitola.

4.2.1 Rozdělení

4.2.1.1 Nepřímé metody

Všechny metody konstruují nejprve Voronoiův diagram množiny P $Vor(P)$, $DT(P)$ se pak získá dualizací $Vor(P)$.

4.2.1.2 Přímé metody

Metody lokálního zlepšování (*local improvement methods*) – začínají s libovolnou triangulací, pak lokálně modifikují hrany sdílené dvojicí trojúhelníků tak, aby bylo splněno úhlové kritérium (prohazují se diagonály – alternativní název je tedy prohazovací metody – *flipping algorithms*).

Inkrementální vkládání (*incremental insertion*) – on-line metody. Začínají s trojúhelníkem, který obsahuje konvexní obálku bodové množiny, pak vkládají body z P po jednom. Trojúhelník obsahující právě přidaný bod se rozdělí vložением tohoto bodu jako nového vrcholu. Všechny trojúhelníky sousedící s novými se rekurzivně testují v topologickém pořadí na platnost úhlového kritéria a pokud jej nesplňují, prohodí se jejich úhlopříčky.

Metody inkrementální konstrukce (*incremental construction*) – užívají vlastnost prázdné kružnice. Postupně budují takové trojúhelníky, jejichž kružnice opsané neobsahují žádné body P .

Metody včlenění do vyšší dimenze (*higher dimensional embedding methods*) – transformují body do prostoru E_3 , spočítají konvexní obálku transformovaných bodů; DT se získá projekcí konvexní obálky zpět do E_2 .

Metody rozděl a panuj (*divide & conquer, D&C*) – jsou založeny na rekurzivním dělení a lokální triangularizaci množiny bodů a pak na fázi sdružování (merging), kdy se spojí výsledné triangulace.

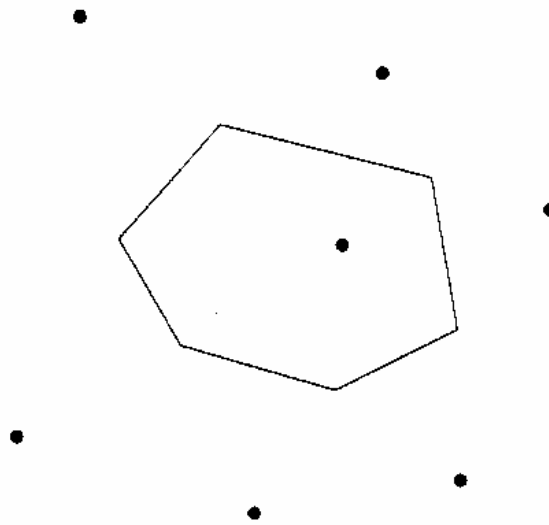
Přímé metody konstrukce DT jsou obecně účinnější, protože se nemusí počítat a ukládat $Vor(P)$.

4.2.2 Konstrukce Voronoiova diagramu

Dále se budeme věnovat bodovým Voronoiovým diagramům.

Nechť S je množina N bodů v rovině. Hledáme oblast obsahující bod p_i , ($p_i \in S$) takovou, že libovolný bod z této oblasti je blíže k p_i než kterémukoli jinému bodu z S . Cítíme, že řešení tohoto problému rozdělí rovinu na regiony (každý region je oblast kolem bodu, ve kterém se může nacházet jiný bod, který je zaručeně bližší než jakýkoli jiný bod mimo region).

Nechť p_i a p_j jsou dva body v rovině. Oblasti, v níž se nalézají body bližší k p_i než k p_j je právě ta polorovina vzniklá z roviny rozdělením kolmicí na $p_i p_j$ procházející středem $p_i p_j$, která obsahuje bod p_i . Označme tuto polorovinu jako $H(p_i, p_j)$. Oblast obsahující body bližší k p_i než kterémukoli jinému bodu je průnikem $N - 1$ polorovin a má tvar konvexního polygonu, který má nejvýše $N - 1$ stran. Označme ji $V(i)$. Tento útvar se nazývá Voronoiov polygon pro vrchol p_i .



Obr. 4.2: Voronoiov polygon

Těchto N Voronoiových polygonů vytváří v rovině síť, které budeme říkat Voronoiov diagram a budeme ji označovat $Vor(S)$.

Vrcholy tohoto diagramu se nazývají Voronoiovy vrcholy a úsečkám, které je spojují, říkáme Voronoiovy hrany.

Každý z N vrcholů množiny S náleží právě jednomu Voronoiovu polygonu. To tedy znamená, že leží-li bod o souřadnicích (x, y) v polygonu $V(i)$, pak je tento bod nejbližším sousedem vrcholu p_i .

Konstrukcí Voronoiova diagramu $Vor(S)$ na množině bodů S rozumíme vytvoření jeho popisu jako planárního grafu, skládajícího se z následujících částí:

- souřadnice Voronoiových vrcholů
- množina hran spojujících vždy dva Voronoiovy vrcholy a dvě hrany, seřazené proti směru chodu hodinových ručiček, které jsou jejich následníky v každém koncovém vrcholu hrany (DCEL). Tato setříděnost zároveň definuje proti směru chodu hodinových ručiček orientované cykly hran v každém vrcholu a po směru orientované cykly hran kolem každé oblasti (Voronoiova polygonu).

Nejjednodušší přístup ke konstrukci Voronoiova diagramu je konstrukce po jednom Voronoiově polygonu v každém kroku.

4.2.3 Konstrukce Voronoiova diagramu metodou rozděl a panuj

Z důvodu algoritmické složitosti $O(N \log N)$ je vhodné tento problém řešit metodou rozděl a panuj. Tento postup lze rozdělit do tří kroků:

- rozděl S na dvě podmnožiny S_1 a S_2 , přibližně stejně velké,
- sestroj rekurzivně $Vor(S_1)$ a $Vor(S_2)$,
- spojením $Vor(S_1)$ a $Vor(S_2)$ vrať $Vor(S)$,
- sestroj polygonální řetězec σ oddělující S_1 a S_2 ,
- zruš všechny hrany $Vor(S_2)$ ležící vlevo od σ a stejně tak všechny hrany $Vor(S_1)$ ležící vpravo od σ . Výsledkem je $Vor(S)$, tedy Voronoioův diagram na množině bodů S .

Konstrukce řetězce σ

Při konstrukci řetězce σ musíme najít nejprve jeho polopřímkové koncové hrany. Každý takový paprsek řetězce σ je kolmou osou pomocného segmentu $CH(S_1)$ a $CH(S_2)$. Pokud existují konvexní obálky těchto dvou oblastí, pak výše zmíněné pomocné segmenty t_1 a t_2 jsou sestrojitelné nejhůře v lineárním čase a naše paprsky mohou být rychle nalezeny. Známe-li tyto paprsky, pokračujeme v konstrukci hranu po hraně.

Horní paprsek (vstupní hrana) je kolmý na spojnici dvou bodů množiny S (segment t_1). Bod z se pohybuje po paprsku směrem dolů. Nejprve leží v některém polygonu jak diagramu $Vor(S_1)$, tak i $Vor(S_2)$. Pokračuje, dokud nepřekříží hranu jednoho z těchto polygonů, kdy změní směr pohybu. Například nejprve narazí na hranu z $Vor(S_2)$. To znamená, že nyní bod z leží blíže k dalšímu bodu z S_2 a mezi dalšími dvěma stejně vzdálenými body z $Vor(S_1)$ a $Vor(S_2)$. Dokud nenarazíme na další polygon (z $Vor(S_1)$ nebo $Vor(S_2)$), pohybujeme se opět po jejich ose. Takto pojedeme mezi jednotlivými body dokud nenarazíme na dolní (výstupní) paprsek řetězce σ .

Odstranění přebytečných hran

Během konstrukce tohoto řetězce musíme současně rušit hrany přesahující $Vor(S_1)$ a $Vor(S_2)$ (nalevo resp. napravo).

4.2.4 Přírůstková konstrukce Voronoiova diagramu

Přírůstkový algoritmus začíná s Voronoiovým diagramem nad několika body množiny S , takzvanými generátory. Ten se poté modifikuje krok za krokem přidáním nového generátoru.

Pro každý generátor p sestrojíme Voronoiov polygon takto:

- lokalizujeme Voronoiov polygon $V(i)$, do kterého generátor p padl,
 - sestrojíme osu, půlící úsečku pp_i , a ta protne polygon $V(i)$ ve dvou bodech (body ležící v průniku vnitřní oblasti polygonu $V(i)$ a přímky procházející těmito dvěma průsečíky jsou stejně vzdálené od obou generátorů p i p_i , a navíc jsou k těmto dvěma generátorům blíže než k jakémukoliv jinému v diagramu). Vezmeme jeden z těchto průsečíků q a přejdeme jeho směrem do polygonu $V(j)$. Sestrojíme osu půlící úsečku pp_j a ta protne polygon $V(j)$ ve dvou bodech. Jedním z nich je bod q . Vydáme se směrem druhého průsečíku a tento proces opakujeme, až narazíme znovu na polygon $V(i)$, tj. Voronoiov polygon V generátoru p se uzavře.
 - z diagramu vypustíme všechny vrcholy, hrany a části hran, které leží uvnitř polygonu V a aktualizovaný Voronoiov diagram doplníme o nové Voronoiovy vrcholy (vrcholy polygonu V) a nové Voronoiovy hrany (tvořící obálku polygonu V)
- Tyto tři kroky opakujeme pro každý bod množiny S vkládaný do diagramu.

4.2.5 Tvorba Delaunayovy triangulace pomocí Voronoiova diagramu a nalezení konvexní obálky

Jak je řečeno v Definicí 3.16. Delaunayovy triangulace, je Voronoioův diagram jejím přímkovým duálem. Výslednou triangulaci tedy získáme tak, že přímkou spojíme každé dva sousední body Voronoiovy hrany tak, že ji kolmo protnou.

Paprsky (výstupní hrany neuzavřených Voronoioových polygonů) Voronoiova diagramu oddělují dvojice sousedních bodů konvexní obálky množiny S . Pokud začneme s jedním bodem konvexní obálky (např. bod s nejnižší y souřadnicí) můžeme po směru hodinových ručiček cestou přes neuzavřené polygony snadno nalézt ostatní body.

4.2.6 Inkrementální vkládání - Delaunayova přírůstková triangularizace

Triangulaci můžeme nazvat Delaunayovou, pokud splňuje podmínku tzv. prázdných opsaných kružnic. Následující tzv. přímé algoritmy jsou postaveny právě na testování této podmínky, popř. úhlové max-min podmínky vedoucí k ekvivalentním výsledkům.

Delaunayova přírůstková triangularizace je založena na přidávání bodu po bodu do triangulace a lokální optimalizaci trojúhelníkové sítě v jeho okolí.

Začínáme s velkým trojúhelníkem p_1, p_2, p_3 , obsahujícím množinu S . Tyto body nepatřící do S se spolu s incidujícími hranami později zruší.

Algoritmus přidává body v náhodném pořadí a udržuje DT současné množiny bodů. Uvažme přidání bodu p_r , nejprve najdeme trojúhelník současné triangulace obsahující p_r a přidáme hrany z p_r do vrcholů trojúhelníka. Pokud p_r leží na hraně triangulace e , musíme přidat hrany z p_r do protilehlých trojúhelníků sdílejících e .

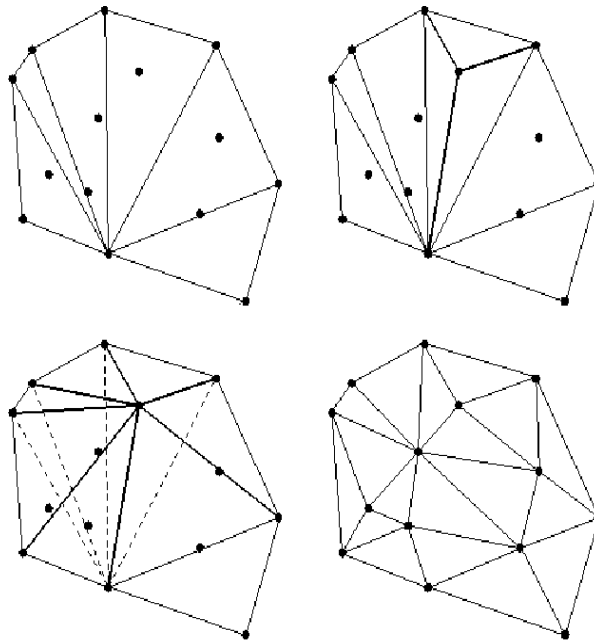
Nyní máme opět triangulaci, ne však nutně Delaunayovu. Některé hrany mohou být neplatné a musí být prohozením úhlopříček nahrazeny jinými. Libovolná hrana, která byla legální, se stane neplatnou pouze změnou incidujícího trojúhelníka. Je proto potřeba kontrolovat pouze hrany nově vytvořených trojúhelníků.

4.2.7 Inkrementální konstrukce

Uvádím jeden z algoritmů, používající k v triangularizaci vlastnosti prázdné opsané kružnice. Nejprve se vytvoří konvexní obálka a postupně se vkládají, za testování podmínky, další body.

Nalezení konvexní obálky

Nalezneme bod s nejnižší hodnotou souřadnice v ose x a přesuneme jej na začátek seznamu. Dále proti směru hodinových ručiček hledáme další krajní bod následujícím postupem: první a druhý bod seznamu určí přímku. Zkontroluje se poloha třetího bodu vůči této přímce dosazením do její rovnice. Vyjde-li kladná hodnota, bod leží blíž k hranici než bod druhý a proto tyto dva body vyměníme. Pro nulovou hodnotu (bod leží



Obr. 4.3: Postupná tvorba triangulace metodou inkrementální konstrukce

na přímce) se zkontroluje, zda je blíž prvnímu bodu, než bod druhý. V takovém případě se body také vymění. Takto se zkontrolují i zbývající body seznamu s tím, že při výměně bodů se vypočte nová přímka. Jakmile se určí první dva body hranice, vezmou se jako určující body pro přímku opět druhý a první bod, tentokrát ovšem v opačném pořadí. Pak vyhledáme výše popsáním postupem další bod hranice a zařadíme ho za druhý bod do seznamu. Pro následující hledání určí přímku třetí a první bod. Takto se postupuje do doby, dokud nejsou nalezeny všechny hraniční body.

Konstrukce triangulace

První bod konvexní obálky spojíme s ostatními. Postupně se vkládají další body, které nejsou dosud v síti. Nejprve nalezneme, do kterého trojúhelníku vkládaný bod padne. Tento trojúhelník se vložím nového bodu rozdělí na tři nové trojúhelníky, tento nový bod bude jejich společným vrcholem. Na nově vzniklé trojúhelníky provedeme test Delaunayovy podmínky.

Kontrola triangulace

Kolem nového trojúhelníku se opiše kružnice a kontroluje se zda v ní neleží vrchol protilehlého trojúhelníku. Pokud ano, musí se hrana přepnout. Tím se dva trojúhelníky transformují a musí se opět znovu zkontrolovat. Kontrolují se hrany původního protilehlého trojúhelníku.

4.2.8 Metody včlenění do vyšší dimenze

Všechny body množiny S se transformují z E_2 do E_3 , to znamená např. transformací na paraboloid: $p_r = (x_i, y_i, x_i + y_i)$, spočte se konvexní obálka získaných bodů. „Horní“ stěny této obálky se dále neuvažují, ostatní se promítnou zpět do roviny xy . Získaná projekce je $DT(S)$.

4.2.9 Algoritmus rozděl a panuj pro konstrukci Delaunayovy triangulace

Podobně jako při konstruování Voronoiova diagramu tímto přístupem, rozdělíme nejprve množinu S na dvě podmnožiny S_1 a S_2 tak, že rozdíl jejich velikostí je maximálně jedna a rozdělení je realizováno přímkou. Předpokládejme, že body patřící množině S_1 mají menší x -ovou souřadnici než body množiny S_2 . Množině S_1 (resp. S_2) pak budeme říkat levá (resp. pravá) množina generátorů. Obě množiny jsou rekurzivně děleny stejným způsobem, dokud výsledná podmnožina vzniklá dělením není dostatečně malá (tj. přibližně tři až pět bodů), aby mohla být jednoduše triangularizována. Výsledné triangulace množin S_1 a S_2 , spojíme a získáme tak Delaunayovu triangulaci $S_1 \cup S_2$.

Nyní si popíšeme způsob spojování triangulací. Předpokládejme existenci již sestavených triangulací $Del(S_1)$ a $Del(S_2)$.

Nejprve najdeme $p_1 \in S_1$ a $p_2 \in S_2$ takové, že všechny ostatní body z S jsou zdola ohraničeny přímkou $p_1 p_2$ a sestrojíme hranu $p_1 p_2$. Říkáme, že hrana $p_1 p_2$ je dolní společnou tečnou hranou. Podobně najdeme $p_3 \in S_1$ a $p_4 \in S_2$ takové, že všechny ostatní body z S jsou shora ohraničeny přímkou $p_3 p_4$ a sestrojíme hranu $p_3 p_4$. Říkáme, že hrana $p_3 p_4$ je horní společnou tečnou hranou. Tyto dvě nové hrany patří mezi Delaunayovy hrany v $Del(S_1 \cup S_2)$.

Nyní odstartujeme od dolní společné tečné hrany proces odstraňování nadbytečných hran z $Del(S_1)$ a $Del(S_2)$ a proces vkládání nových Delaunayových trojúhelníků do $Del(S_1 \cup S_2)$ jeden po druhém, dokud nenarazíme na horní společnou tečnou hranu. Nový Delaunayův trojúhelník je sestrojen vložением hrany spojující generátor z množiny S_1 s generátorem z množiny S_2 . Této hraně budeme říkat traverzová hrana.

Označme dolní společnou hranu jako e . Konstrukce Delaunayova trojúhelníka příslušejícího hraně e se provede následujícím způsobem. Necht' p_1 je levý koncový bod hrany e . Necht' jsou dále e_1, e_2, \dots, e_k hrany v $Del(S_1)$ a vycházející z vrcholu p_1 seřazené proti směru chodu hodinových ručiček a q_1, q_2, \dots, q_k jsou druhé koncové body těchto hran. Pro $i=1, 2, \dots, k-1$ nyní testujeme, zda uvnitř kružnice procházející vrcholy p_1, q_i a q_{i+1} nachází nějaký generátor z množiny S_2 . Je-li takový generátor nalezen smažeme e_i z triangulace $Del(S_1)$. Stejným způsobem testujeme hrany $Del(S_2)$ vycházející z vrcholu p_2 (seřazené po směru chodu hodinových ručiček) a smažeme nevyhovující hrany (neuspokojující kritérium prázdné opsané kružnice).

Nyní předpokládejme, že hrana $p_1 q$ je první hranou po hraně e (v pořadí proti směru chodu hodinových ručiček) vycházející z vrcholu p_1 a podobně hrana $p_2 r$ je první hranou po hraně e (v pořadí ve směru chodu hodinových ručiček) vycházející z vrcholu p_2 . Testujeme jestli vrchol r leží uvnitř kružnice procházející body p_1, p_2 a q . V případě, že tomu tak není, sestrojíme traverzovou hranu $p_1 q$. V opačném případě sestrojíme traverzovou hranu $p_1 r$.

4.2.10 Omezená Delaunayova triangulace

V omezené DT jsou částí triangulace povinné hrany. V jejich blízkém okolí nemusí být splněna Delaunayova podmínka. Je velmi výhodná pro modelování terénu - nabízí možnost vložit důležité hrany (údolnice, horské zlomy ...), navíc se svými vlastnostmi dobře hodí pro vizualizaci.

Jako omezenou *DT* lze také řešit triangularizaci nekonvexního polygonu, kde se jeho hranice vezme jako povinná hrana.

5 Datové struktury pro triangulace v rovině

Triangulace T s vrcholy $P = \{ p_i = (x_i, y_i) \}, i = 1, \dots, N$ může být popsána množstvím datových struktur. Obvykle se využívá některé z prvních dvou zde uvedených.

1. Seznam N_T celočíselných trojic $\{(a_i, b_i, c_i)\}, i = 1, \dots, N_T$ takových, že a_i, b_i, c_i jsou indexy vrcholů i -tého trojúhelníku.
2. Seznam N_E celočíselných dvojic $\{(k_i, l_i)\}, i = 1, \dots, N_E$, takových, že k_i, l_i jsou indexy koncových bodů i -té hrany triangulace.
3. Pro každý vrchol p_i seznam ukazatelů na vrcholy, které jsou s p_i spojeny hranou.
4. Pro každý trojúhelník T_i seznam ukazatelů na tři jeho sousední trojúhelníky. Tato struktura musí být doplněna ještě seznamem trojúhelníků dle bodu 1..

U kapitoly zabývající se TINy bude uvedena struktura tzv. „okřídlené hrany“ používané v GIS.

6 Programové řešení

6.1 Popis programů

Programy byly vytvořeny v prostředí programovacího jazyka MATLAB. Realizovány byly dvě použitelné metody. První z nich je nenasytná triangulace popsaná ve 4 kapitole o triangularizačních algoritmech. Druhý program je ukázkou přírůstkového algoritmu pro konstrukci Delaunoyovy triangulace. Jako datové struktury jsou použity první dvě možnosti uvedené v předchozí kapitole (tj. seznam hran a seznam trojúhelníků).

Popis funkcí:

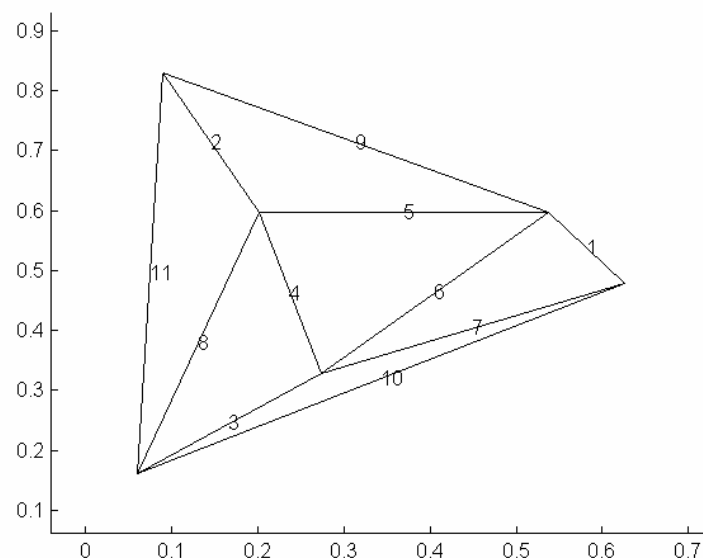
Nenasytná triangulace

Funkce $hrany=greedy(x, y)$: vstupem je množina bodů, výstupem je pole hran patřících do triangulace.

Delaunoyova triangulace

Funkce $tri = delauny(x, y)$: vstupem je množina bodů, výstupem jsou trojice vrcholů jednotlivých trojúhelníků triangulace.

6.2 Výstupy programů



Obr. 6.1: Nenasytná triangulace 6 náhodně generovaných bodů

Výstup : reprezentace hran pomocí indexů vstupních bodů postupně zasazovaných do triangulace.

l =

3 4

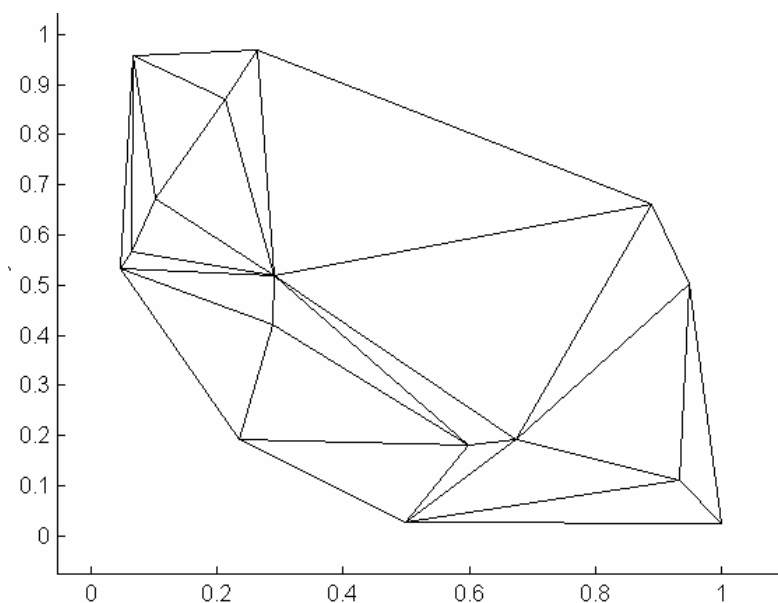
1 6

2 5

1 2

...

n



Obr. 6.2: Delaunayova triangulace

Výstup : reprezentace trojúhelníků triangulace popsaná indexy vrcholů jednotlivých trojúhelníků

l =

14 9 12

2 16 14

16 9 14

8 2 14

4 2 8

...

n

7 Digitální model terénu a rekonstrukce

7.1 Vymezení pojmů DMT a rekonstrukce

Definice 7.1 Model terénu je zmenšený, generalizovaný prostorový (trojrozměrný) model terénního reliéfu.

Definice 7.2 Digitální model terénu (DMT) je soubor uspořádaných číselných informací o terénním reliéfu uložený v paměti počítače, doplněný příslušným programovým vybavením na jejich používání.

Charakteristické prvky DMT

Terénní plocha je velmi nepravidelná. Vykazuje místa, kde je průběh hladký, jinde jsou linie, na kterých je hladkost narušena. Zvláštní charakter mají také vrcholy, sedla, údolnice a hřbetnice, které mají podélně často hladký průběh, ovšem v kolmém směru se na nich terénní plocha může ostře lámat. Tyto zjevy se v terminologii DMT nazývají singularity, jejich matematickou charakteristikou je nespojitost funkce či nespojitost její derivace.

Modelovaná plocha může být velmi rozsáhlá, popisovaná značným počtem dat. Na druhé straně vzhledem k rozsáhlosti většinou dosahuje malých převýšení, rozměry ve směru os x a y jsou větší než ve směru osy z .

Valnou většinu terénní plochy lze charakterizovat jako funkci polohopisných souřadnic x, y . Těm lze totiž vždy přiřadit pouze jednu výškovou složku z . Výjimkou mohou být terénní stupně (zlomy nebo těž schody), ve kterých je terénní plocha svislá, někdy dosahuje až charakteru převisu. Tzv. převisy jsou místa, kterými lze vést svislici, protínající povrch ve dvou nebo více bodech. Taková místa se vyskytují velmi zřídka a pro potřeby modelování terénu nemají valný význam.

Rekonstrukcí rozumíme takovou činnost, ve které z dostupných údajů získáváme model zobrazovaného terénu. Obvykle se jedná o práci nad spojením triangulace a metrických údajů převedených na výškovou složku.

7.2 Zdroje dat

Získat podklady pro tvorbu DMT je možné následujícími způsoby:

Geodetická měření (klasická tachymetrie, totální stanice)

Přímý převod údajů ze záznamníků geodetických přístrojů do softwarového prostředí pro tvorbu modelu. Používá se pro malé plochy, jde o údaje vyznačující se vysokou přesností, jejich získávání je velmi časově i finančně náročné.

Digitalizace existujících mapových podkladů

Výškové údaje lze odvodit také z kartografických zdrojů obsahujících výškopis. Postup digitalizace je stejný jako u jiných zdrojů. Důležitý je výběr bodů a linií pro které se digitalizuje výška. V úvahu přichází výběr jednotlivých bodů po vrstevnicích a singularitách (hřebeny, údolnice). Z těchto údajů se posléze vytvoří TIN.

Vyhodnocování fotogrammetrických snímků

Stereoskopická interpretace leteckých nebo kosmických snímků (např. systém SPOT) s využitím různých typů přístrojů.

Kombinované metody

7.3 Datové reprezentace

Pro snadný popis terénu se většinou používá princip rozdělení celé plochy na menší části, které se dají snadněji geometricky popsat. Podle charakteristik těchto plošek můžeme rozlišit následující typy modelů.

Rastrový model

Je dán množinou elementárních plošek nad prvky pravidelného rastru. Jedná se vlastně o zborcené čtyřúhelníky, které je možno rozdělit na trojúhelníky, případně uvažovat i jiné, složitější plochy. Vypovídací schopnost modelu silně závisí na jeho rozlišovací úrovni. Rastrový model je v principu definován hodnotami x , y , z – tedy prostorovými souřadnicemi každého bodu rastru.

Polyedrický model

Zde jsou elementárními ploškami trojúhelníky, které k sobě přiléhají a tvoří tak mnohostěn, přimykající se k terénu. Vrcholy mnohostěnu jsou body na terénní ploše, souřadnicově určené příslušnými geodetickými metodami. Interpolace plochy se

obvykle provádí lineárně po trojúhelnících. Vrcholy trojúhelníků je vhodné zvolit tak, aby vystihovali nejen průběh terénu, ale i jeho singularity. Tento přístup je v současné době nejrozšířenější, je převážnou částí této práce.

Plátový model

Tento typ modelu předpokládá, že se povrch rozdělí na nepravidelné, obecně křivé plošky trojúhelníkového nebo čtyřúhelníkového tvaru, přičemž hranice dělení se vedou po singularitách. Zřídka se používají rovněž obecné n -úhelníky. Rozdělení modelu na pláty je velmi výhodné a snadné je rozdělení vést po singularitách a charakteristických bodech terénu. Popis tvorby jednotlivých plátů je např. v [Ježe99].

7.3.1 Rastrové modely terénu

Zkoumaná oblast je rozdělena na pravidelný rastr, jehož buňky jsou prostorově lokalizovány. Každá buňka je charakterizována výškovou složkou. Nejčastěji se jedná o matici, tedy o přímé datování informační vrstvy.

Výhody – jednoduchost, lehká pochopitelnost struktury, snadné způsoby postupů zpracování.

Nevýhody – velké množství ukládaných dat pro velká území, nepřesnosti při hrubém rastru, nadbytečnost údajů na plochách, nepřesnost při výpočtech pro reprezentované liniové a plošné objekty (nesledují strukturu rastru).

Obvykle se předpokládá, že výška uložená v každé z buněk rastru platí pro celou buňku. V jiných případech uložená výška platí pro střed buňky a v modelu je možné dále interpolovat. Potom hovoříme o tzv. laticces. Tento model můžeme považovat za (vektorový) bodový model terénu.

Vstupní údaje pro tvorbu rastrového modelu terénu musí být strukturovány tak, aby umožňovaly vznik modelu. Údaje těmto podmínkám obvykle nevyhovují, proto musíme používat různé postupy interpolace.

Interpolace výšek bodů z nepravidelně rozmístěného bodového pole

Výšky zohledněných bodů se váží nejčastěji čtvercem inverzní vzdálenosti od bodu rastru. Tato metoda se nazývá *inverse distance weighting IDW*.

Interpolace výšek bodů rastru ze zdigitalizovaných a rasterizovaných vrstevnic

Jednoduchý postup, kdy je zdrojem informací vrstevnicová mapa, v příslušných buňkách se uloží hodnota vrstevnice. Do mezilehlých buněk rastru je uložena hodnota určená lineární interpolací.

Interpolace z výšek rastru polyedrického nebo plátového modelu

Tento způsob je velmi přesný, avšak předpokládá existenci daného modelu.

Kromě interpolace lze též použít i fotogrammetrické vyhodnocení stereomodelu přímým odečtením pro požadované body rastru, častěji se však zjistí pouze význačné body a opět se interpoluje prvním způsobem.

7.3.2 Nepravidelné trojúhelníkové sítě – TIN

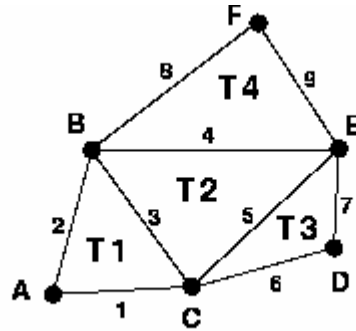
Rozdělují terénní plochu na dílčí plochy trojúhelníkového tvaru. Hranice dělení jsou obvykle vedeny po singularitách, tj. liniích na kterých dochází k výrazným změnám v průběhu terénní plochy jako celku. Prvotním zdrojem informací jsou údaje o prostorových vrcholech těchto trojúhelníků – jejich poloha v souřadnicovém systému a hodnota jejich výšky. Spojnice vrcholů trojúhelníků by měly co nejvýstižněji sledovat linie, na kterých dochází k výrazným změnám v průběhu terénní plochy jako celku. Ve vnitřním trojúhelníku předpokládáme pravidelný rovnoměrný průběh výšek. Pro tyto entity vybudujeme soustavu definovaných topologických vztahů tak, aby plochy trojúhelníků bylo možné popsat a přitom nebylo nutné údaje o vrcholech, jejich spojnicích a plochách ukládat vícenásobně.

Struktura okřídlené hrany

Podle výstupu triangulace můžeme vybrat přístup k ukládání údajů o síti.

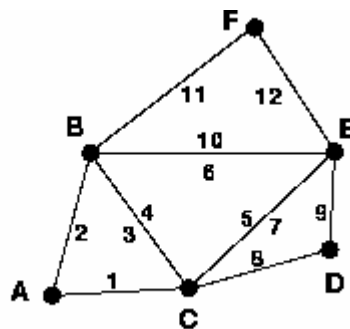
Pokud máme jako výstup soubor trojúhelníků zvolíme si ukládání do tří tabulek:

1. Tabulka bodů – souřadnice x, y jednotlivých vrcholů
2. Tabulka hran – dva odkazy na tabulku bodů
3. Tabulka trojúhelníků – tři odkazy do seznamu hran



Obr 7.1: Struktura okřídlené hrany orientovaná na trojúhelníky

Podobný systém zvolíme i pro výstup hran. Zde vystačíme se dvěma tabulkami, všechny informace jsou uloženy již v tabulce hran. Jako její doplňující údaj se uchovává informace i o tzv. dvojčeti. Každý trojúhelník je tvořen třemi hranami, dvojče je hrana sdílená dvěma trojúhelníky. Fyzicky se jedná o stejnou hranu, ale pro uchování topologie má dva indexy.



Obr 7.2: Struktura okřídlené hrany orientovaná na hrany

Výhody – menší objem ukládaných informací, možnost určit z souřadnic v každém bodě, přesnost.

Nevýhody – složitá struktura a postup jejího vzniku, odvození jakékoli informace je výpočetně náročné.

Při tvorbě TIN není nepravidelnost vstupních bodů na škodu. Důležité je, aby byly zahrnuty body ležící na všech důležitých singularitách. Z tohoto důvodu nejsou příliš vhodné zdigitalizované vrstevnice. Na nepravidelně rozmístěném bodovém poli lze použít mnoho triangularizačních algoritmů, běžně se používá Delaunayova triangulace, případně kritérium co největší rovnostrannosti trojúhelníků, jejich nejmenšího obvodu a další.

7.3.3 Vrstevnicové modely terénu

Tento model je charakterizován souborem vrstevnic, tj. křivek, které spojují body se stejnou nadmořskou výškou. Tato liniová reprezentace se používá i pro zobrazení jiných hodnot pro než nadmořskou výšku. Potom je nazýváme izočarami (např. izobara, izoterma atp.)

Vrstevnice se ukládají jako polyline, tedy posloupnost bodů s jejich souřadnicemi. Pro určení bodů mezi vrstevnicemi musíme interpolovat.

7.3.4 Převody mezi jednotlivými reprezentacemi modelů terénu

Vstupní data používaná v GIS mají různé formáty. Nejčastějším zdrojem těchto dat jsou topografické mapy s vrstevnicemi. Tyto mapy musíme nejprve zdigitalizovat. Dalším zdrojem jsou letecké fotogrammetrické snímky, tedy rastry. Již nesourodost těchto dat nás nutí transformovat. Dalšími důvody jsou nevýhody jednotlivých reprezentací.

Nejčastěji potřebujeme převod *rastr - TIN* nebo *vrstevnice - TIN*, někdy i opačné.

7.3.4.1 Převod *rastr - TIN*

Tento převod lze chápat jako případ generalizace, kdy redukuje počet vrcholů TINu. Existuje velké množství algoritmů řešících tento problém, většina má tyto hlavní prvky:

- výběr bodu rastru, rozhodnutí, zda bude ponechán či vyřazen,
- rozhodnutí kdy bude převod ukončen.

Některé metody:

- Přiřadí se váha každému bodu. Ta se určí porovnáním výšky bodu s interpolovanou výškou jeho osmiokolí. Ponechány jsou ty body rastru, které tento rozdíl mají největší. Na tyto body je použit některý z triangularizačních algoritmů.
- Nejprve triangulujeme čtyři krajní body mřížky. Tato triangulace je postupně vyhlazována přidáváním dalších bodů. Triangulace končí v okamžiku, kdy TIN dostatečně aproximuje původní rastrovou reprezentaci.
- Nalezneme body rastru odpovídající specifickým terénním znakům (vrchole, sedla, hřbety, údolnice). Následně tyto body doplníme o další a provedeme triangularizaci.

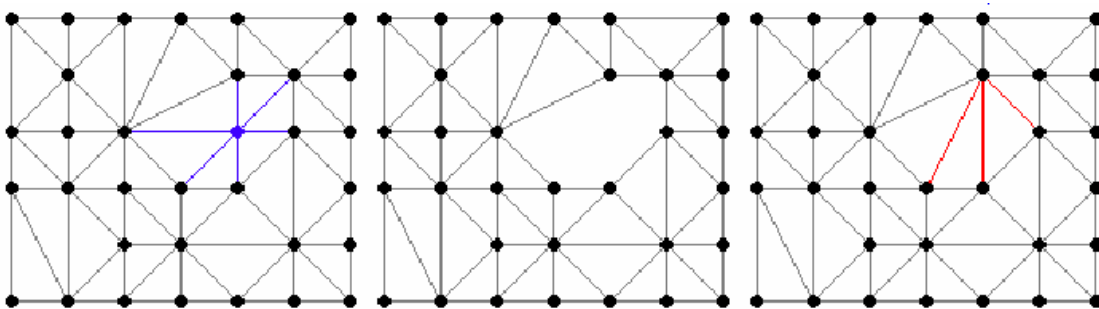
Drop heuristic

Vstupem této metody je rastrová mřížka upravená na pravidelnou trojúhelníkovou síť. Poté jsou postupně vypouštěny vrcholy a tak vzniká TIN. Po vypuštění jednoho vrcholu vzniká polygon. Na jeho vrcholy pak aplikujeme *DT* a tím provedeme retriangulaci.

Velmi důležitým, avšak obtížným, krokem v této metodě je volba bodu, který bude vypuštěn. Tento proces výběru se provádí pomocí opakované iterace.

Na počátku každé iterace postupně procházíme po jednotlivých bodech převáděné rastrové mřížky. Aktuální bod odstraníme, tak vznikne polygon, na který provedeme *DT*. Následně určíme převýšení mezi odstraněným bodem a bodem novým, určeným v *DT*. Toto převýšení považujeme za chybu způsobenou vymazáním vrcholu. Tuto hodnotu uložíme. Pak vrátíme odstraněný bod a postoupíme na následující vrchol převáděné mřížky a celý postup opakujeme. Poté co takto určíme chybu u všech vrcholů TINu (všech bodů převáděné mřížky), definitivně vyřadíme ten vrchol, který má tuto chybu nejmenší. Tímto krokem ukončíme jeden cyklus iterace.

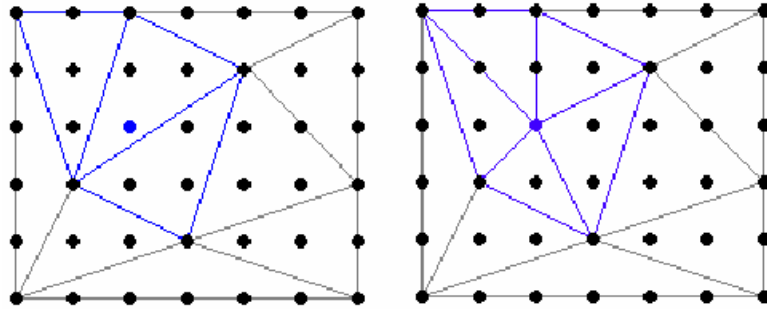
Je zřejmé, že se chyba vrcholů bude postupně zvětšovat v závislosti na počtu vyřazených vrcholů. Iterujeme do té doby, dokud je nejmenší chyba z převýšení vrcholů větší než nějaká (předem určená) dopustná chyba. Z obrázku vyplývá, že po odstranění bodu nemusíme počítat chybu pro všechny vrcholy TINu, ale vystačíme s určením chyby u sousedních bodů vyřazeného vrcholu.



Obr. 7.3: Postup při vypuštění bodu metodou Drop heuristic

Postupné vyhlazování - Incremental refinement

Na vstupu této metody je rastr a maximální povolená chyba ε . Nejprve z rastru vybereme několik bodů a provedeme hrubou triangulaci, tak nám vznikne TIN s velmi malým počtem vrcholů. Tento vstupní TIN postupně vyhlazujeme přidáváním dalších bodů rastru, které mají nejmenší chybu.



Obr. 7.4: Vložení nového bodu metodou postupného vyhlazování

Základní kroky tohoto algoritmu jsou:

1. Na vstupu máme body rastru, které spadají do množiny P . Nejprve vybereme čtyři krajní body z P , přiřadíme je do množiny S .
2. Nad touto množinou provedeme $DT(S)$.
3. Potom rozdělíme do seznamů body P podle toho, do kterého nově vzniklého trojúhelníku padnou. Jestliže leží na hraně trojúhelníku, můžeme si vybrat, kam jej přiřadíme.
4. Algoritmus končí, jestliže všechny body mají chybu nejvýše rovnou ε . Pak je TIN hotov, v opačném případě odstraníme bod s maximální chybou z P , přidáme ho do S a pokračujeme od bodu 2.

Jestliže je k počet sousedů z množiny S nově vloženého bodu z P , pak zanikne $k - 2$ trojúhelníků a vznikne k nových trojúhelníků.

7.3.4.2 Převod vrstevnice - TIN

Pro převod vrstevnic do TINu musí nejprve dojít k digitalizaci těchto vrstevnic. Tak získáme vektorovou datovou strukturu, kde je vrcholům a liniím přiřazena výška v závislosti na vrstevnici, na které leží.

Při převodu na TIN provádíme triangulaci v oblasti mezi vrstevnicemi. Tuto oblast můžeme považovat za polygon s dírou. Pro tento útvar existuje několik standardních

algoritmů počítačové geometrie. I zde můžeme použít *DT* a to tzv. nepřirozenou *DT*, která je té obecně velice podobná. Jejimi vstupními daty jsou polygony.

7.4 Základní analýzy nad TIN

Generování vrstevnic

Jednoduchá operace, při které pomocí rovnice roviny daného trojúhelníku hledáme úsečky s konstantní hodnotou výškové souřadnice. Protože nad TINem obvykle pracujeme s lineární interpolací jednotlivých bodů, jsou vrstevnice tvořeny navazujícími úsečkami lomenými na hranicích trojúhelníků.

Počítání sklonu, směru sklonu, vzdálenosti na povrchu

Při těchto operacích opět vycházíme z rovnice roviny. Sklon získáme jako odchylku roviny trojúhelníku a roviny *xy*. Směr sklonu je dán směrem kolmým k průsečnici rovin *xy* a orientací tohoto souřadného systému. Vzdálenost se počítá vyrovnáním rovinné vzdálenosti po povrchu jednotlivých trojúhelníků.

Volumetrické analýzy

Výpočty objemů se opět načítají nad jednotlivými trojúhelníky vzhledem k některé vztažné nulové rovině.

Extrakce významných prvků z povrchu

Zjišťujeme bodové výstupy pomocí otázek lokálního minima nebo maxima.

Další možnosti práce s TIN umožněné jeho strukturou

Dále můžeme pokračovat funkcemi, které spojují předchozí: tvorba profilů, detekce viditelnosti mezi dvěma body, analýzy viditelnosti (šíření signálu), počítání slunečního osvětlení povrchu, 3D vizualizace a další pokročilé analýzy (hydrologické analýzy, analýzy šíření).

7.5 Rekonstrukce terénu

V mnoha geodetických aplikacích jsou výstupem měření totálními stanicemi informace vztažené k rovině a definované na ní (obvykle redukované vzdálenosti a vodorovné úhly). Po měření jsou dále dostupné informace, ze kterých jsou odvoditelné výškové informace o průběhu terénu. Jedná se zejména o výškové (resp. zenitové) úhly a šikmé vzdálenosti. Pokud chceme z těchto měření rekonstruovat terén obvykle snadno vytvoříme trojúhelníkovou síť, kterou je potřeba vyrovnat a údaje, které lze převést pro

potřeby rekonstrukce terénu a tedy i pro potřebu tvorby DMT. Pro získání prostorových souřadnic (x, y, z) máme tedy k dispozici jednu z následujících reprezentací údajů o jednotlivých hranách:

1. vodorovná vzdálenost l , šikmá vzdálenost l' a orientace spádu o , označme (l, l', o) ,
kde l' je přímo měřená vzdálenost a orientace o je vyjádřena například hodnotou I , pokud spád nabývá kladných hodnot od prvního bodu k druhému, $-I$ v opačném případě,
2. vodorovná vzdálenost l a výškový úhel v (resp. zenitová vzdálenost z), označme (l, v) (resp. (l, z)),
kde výškový úhel v je úhel, který svírá měřený směr a vztázná rovina (resp. zenitovou vzdálenost z máme definovanou jako odchylku měřeného směru od normály vztázné roviny).

Pro další úvahy budeme předpokládat reprezentaci druhou, tj. (l, v) . Převod (l, l', o) na (l, v) je dán rovnicemi:

$$l = l'$$

$$z = \arccos(l/l') \text{ pro } o = I, \text{ resp. } z = \arccos(l/l') + 90 \text{ pro } o = -I.$$

Převod zenitové vzdálenosti z a výškového úhlu v je dán vztahem $v = 90 - z$.

Měřené šikmé vzdálenosti a zenitové úhly jsou obvykle k dispozici z více měření. Po opravách obvyklých fyzikálních korekcí (vlivy refrakce, teploty, nadmořské výšky) je můžeme vyrovnat pomocí prostého průměru. Vodorovné vzdálenosti jsou poté dány redukcí těchto hodnot do zobrazovací roviny.

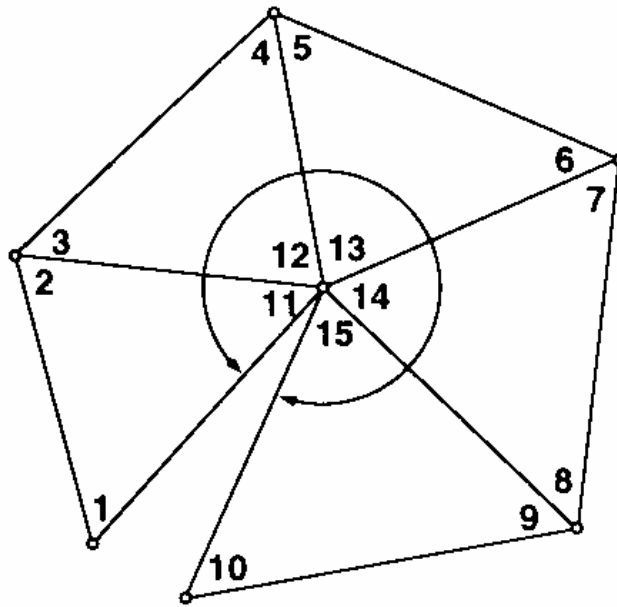
Vyrovnání rovinné sítě (charakterizované vodorovnými úhly a vzdálenostmi) je možné metodami používanými v geodézii zohledňujícími nadbytečná měření. Tvar, rozměr a orientaci sítě určíme metodou podmínkových měření. Jedná se o splnění následujících pěti podmínek (x_i značí úhel trojúhelníku s příslušným indexem):

1. podmínka trojúhelníková

$$x_1 + x_2 + x_{11} - 180^\circ = 0$$

2. podmínka závěrová

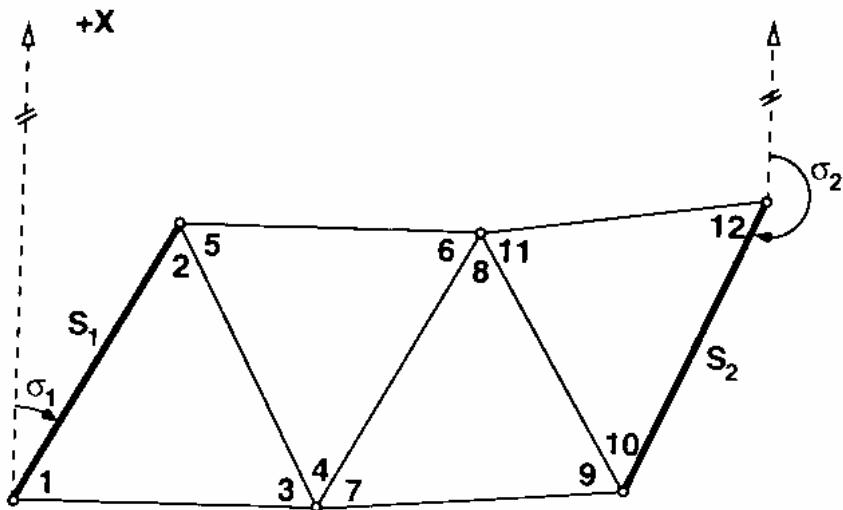
$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} - 360^\circ = 0$$



Obr.7.5: Podmínky tvarové

3. podmínka stranová (obecná věta sinová)

$$\frac{\sin x_1 \sin x_3 \sin x_5 \sin x_7 \sin x_9}{\sin x_2 \sin x_4 \sin x_6 \sin x_8 \sin x_{10}} = 1$$



Obr.7.6: Podmínky základnové a azimutální

4. podmínka základnová (rozměr sítě)

$$\frac{\sin x_1 \sin x_5 \sin x_7 \sin x_{11}}{\sin x_3 \sin x_6 \sin x_9 \sin x_{12}} = \frac{S_2}{S_1}$$

5. podmínka azimutální (směrníková)

$$\sigma_2 = \sigma_1 + x_1 + x_3 + x_4 + x_7 + x_9 + x_{10} \pm i.180^\circ$$

Pro reprezentaci hran triangulace můžeme použít graf uvažující jako atributy daná data. Vhodnou strukturou pro výpočty nad tímto grafem je např. struktura okřídlené hrany (viz kapitola 7.3.2). Jednotlivé hrany by pak byly popsány hodnotami (i, p_j, p_k, l, v) (kde i je index hrany v triangulaci, p_j, p_k jsou rovinné souřadnice počátečního a koncového bodu hrany a l, v výše uvedené charakteristiky). Tabulka bodů by obsahovala pro každý bod seznam koincidujících hran.

Pro rekonstrukci povrchu je možno zvolit například postup používající jednoduchý výpočet převýšení z výškového úhlu v a vodorovné vzdálenosti l pomocí vztahu:

$$h = l \operatorname{tg} v$$

Postupně po jednotlivých hranách procházíme grafem a dopočítáváme z dostupných hodnot výšky jednotlivých bodů. Pro připojení této sítě potřebujeme alespoň v jednom bodě znát z -ovou souřadnici pro daný výškový systém.

8 Užití triangulace na problematiku transformace nehomogenních souřadnic

8.1 Zadání

Máme k dispozici dva seznamy souřadnic identických bodů, první transformovaný do S-JTSK z dřívějšího systému S-SK a druhý přímo v S-JTSK, nerovnoměrně rozmístěných po celé České republice. Ze souřadnicových rozdílů těchto bodů můžeme vypočítat plynule se měnící dvourozměrné chybové vektory v daných bodech. Pomocí těchto identických bodů máme za použití Delaunayovy triangulace navrhnout možnost převodu mezilehlých bodů vzniklých z trigonometrické sítě S-SK (s mezistupněm převodu těchto souřadnic Helmertovou transformací a Jungovou dotransformací - viz např. [Čada00] nebo [Cimb99]) do sítě S-JTSK. Dále máme k dispozici soubor rohů fundamentálních mapových listů v S-SK stejným způsobem transformovaných do S-JTSK. Hlavním výstupem této práce by měly být opravené souřadnice těchto bodů.

8.2 Data

8.2.1 Vznik a přesnost vstupních dat

Pro tvorbu map stabilního katastru bylo zvoleno Cassini-Soldnerovo zobrazení (příčné, válcové, ekvidistantní v polednicích a s dotykovým poledníkem ve středu zobrazovaného území). Takto bylo provedeno mapování v letech 1821-1864 v celé rakousko-uherské monarchii. Pro území dnešní České republiky (tj. pro oblast, kterou máme transformovat) bylo využito dvou souřadných systémů (a to pro Čechy s počátkem v Gusterbergu, pro Moravu a Slezsko Sv.Štěpán ve Vídni). Toto rozdělení na více soustav na relativně malém území bylo nutné pro velká délková zkreslení v kartografických rovnoběžkách na okrajových částech zobrazovaných území (bylo potřeba dosáhnout grafické úrovně map v měřítku 1:2880).

Zobrazovací rovnice tohoto systému mezi sférickými souřadnicemi (y, x) a rovinnými (Y, X) v S-SK jsou $Y = y$ a $X = x$.

Hledání převodu mezi S-SK a S-JTSK má následující úskalí:

- potřebujeme znát dostatečně přesně zeměpisné souřadnice počátků soustav, (Gusterberg a Sv.Štěpán), ty jsou však v různých zdrojích uváděny různě,
- špatné stočení osy X v Gusterberském systému (jeho špatná orientace),

- není znám způsob převodu z Cachova referenčního elipsoidu na referenční kouli,
- síť byla vyrovnána pouze pomocí excesů a poté jako rovinná, navíc nebyla vyrovnávána po jednotlivých řádech (nehomogenita geod. základů),
- nejednotný převod vídeňského sáhu do metrické soustavy,
- průběh izolinií zobrazujících max. deformaci tvoří obecné křivky.

Maximální rozdíl poměrů měřítek Křovákova a Cassini-Soldnerova zobrazení je ve východních Čechách pro zvolený čtyřúhelník 4000x4000 vídeňských sáhů (7,6x7,6km) v y-ové sekci 0,61m ($m_{\text{křovák}} = 0,99992$, $m_{\text{cassini}} = 1$, $q = 0,99992$), ale x-ová sekce už o 3,8m ($m_{\text{křovák}} = 0,99992$, $m_{\text{cassini}} = 1,00042$, $q = 0,99950$).

Vazba Jednotné trigonometrické sítě (JTS) (vybudované v letech 1920-1957) a S-SK byla dána již při tvorbě nového systému tím, že existující nalezené body dřívějších geodetických základů byly povinně zaměřovány a jejich souřadnice byly určovány v S-JTSK. Tyto body byly většinou zaměřovány rajonem z nově stabilizovaného bodu JTS. Tak vznikla množina bodů, u kterých známe (popř. můžeme dohledat) souřadnice v obou systémech. Nezpochybnitelné jsou trvale stabilizované body (kostely, kaple, stavební objekty), u některých bodů může být poloha ovlivněna pozdější přestabilizací z let 1845-1850. Tyto případy však lze analyzovat.

Převod bodů S-JTSK do S-SK pro mapování podle "Instrukce A" byl prováděn Helmertovou transformací, opačný převod je však nekorektní. V roce 1935 se tedy přistoupilo k vytvoření 140 obecných transformačních klíčů, s jejichž pomocí se sestavily tzv. mílové tabulky.

Toto dílo bylo vzhledem k technickému vybavení doby svého vzniku dobré, přesto při dnešním stavu lze přemýšlet o vytvoření globálního klíče a tím i jednoznačného převodu mezi S-SK a S-JTSK. Ten by byl dán množinou identických bodů známých v obou systémech. Tato množina obsahuje přibližně 1000 bodů (s hustotou cca 2body/100km²) a je uzavřená. Zvýšení jejich počtu je možno očekávat pouze v procentech a to pokud se podaří dohledat a dourčit souřadnice bodů číselné triangulace volených na trvalých objektech.

Převod identických bodů S-SK byl proveden pomocí jednotlivých bodů obecných klíčů. Z nich byl vypočten klíč pro Helmertovu transformaci a Jungovu dotransformaci (postup je popsán např. v [Cimb99]) a transformovány identické body (otázkou je

vhodnost této transformace). Tak jsme dostaly dvoje souřadnice identických bodů - transformované body y', x' (*S-JTSK*) a známé souřadnice y, x (*S-JTSK*) z etapy budování JTS. Z nich jsme získali dvojrozměrné chybové pole dy, dx , kde vektory odchylek charakterizují nejen velikost odchylky, ale i její směr (Střední souřadnicové odchylky jsou $m_y = 1,07\text{m}$ a $m_x = 1,06\text{m}$, maximální 4,7m a 5,4m).

Globální klíč by měl následující výhody:

- dodržení zásady z "velkého do malého",
- nemusí se subjektivně rozhodovat o identitě bodů, které se transformují po blocích,
- v přepracovávaném území se nemusí provádět žádné geodetické práce,
- odpadne diskuse, že neexistuje jednoznačný převod z S-SK do S-JTSK.

Jednou z možností jak transformovat mezilehlé body ležící v konvexní obálce známých identických bodů je využít triangulaci. Oprava chybového bodu ležícího uvnitř některého jejího trojúhelníku by pak byla vypočtena pomocí jeho barycentrických souřadnic a chybových vektorů v jeho vrcholech (viz níže). Této možnosti se věnují následující kapitoly.

8.2.2 Popis vstupních dat

Vstupní data:



Obr.8.1: Rozložení vstupních bodů použitých pro vytvoření klíče triangulace • a vyřazené body o

ide_body_trans.stx - body transformované z S-SK

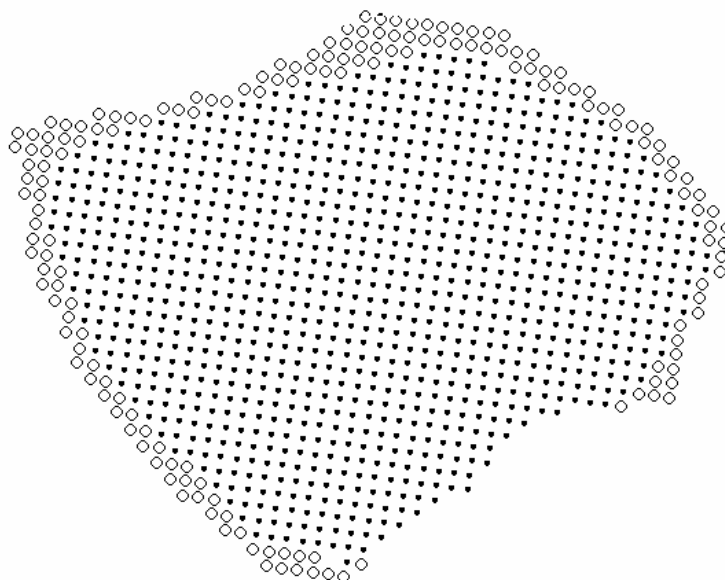
ide_body.stx - body v S-JTSK

- seznamy souřadnic identických bodů ve tvaru

| č.bodu | Y | X | | |
|-----------|-----------|-----------|------|---|
| ide_body | YX | CM | 0 | 0 |
| 901150047 | 720266.60 | 949083.44 | 0.00 | 1 |
| 902150001 | 677483.76 | 948126.78 | 0.00 | 1 |
| 902200001 | 683781.58 | 945698.09 | 0.00 | 1 |
| 902200012 | 689153.20 | 947514.48 | 0.00 | 1 |
| 904050007 | 853340.63 | 991398.24 | 0.00 | 1 |
| 904050024 | 857502.57 | 996522.90 | 0.00 | 1 |

- seznam souřadnic rohů fundamentálních listů S-SK transformovaných do S-JTSK

| | YX | CM | | |
|-----------|-----------|-----------|------|---|
| 14400 | YX | CM | 0 | 0 |
| 100000017 | 671592.71 | 938627.76 | 0.00 | 3 |
| 100000018 | 679103.29 | 937557.23 | 0.00 | 3 |
| 100000019 | 686613.87 | 936486.71 | 0.00 | 3 |



Obr.8.2: Transformované body • a netransformovatelné body o

Výstupní data:

- seznam souřadnic opravených rohů fundamentálních listů,
- seznam souřadnic netransformovatelných bodů.

8.3 Barycentrické souřadnice

Při řešení problému budeme pracovat s tzv. barycentrickými souřadnicemi. Tato soustava je definována takto:

Definice 8.1. Barycentrické souřadnice (x_1, x_2) bodu X s krajními body P_1, P_2 jsou dány předpisem $X = x_1 P_1 + x_2 P_2$ a podmínkou $x_1 + x_2 = 1$ ($x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$).

Definice 8.2. Barycentrické souřadnice (x_1, x_2, x_3) bodu X v trojúhelníku P_1, P_2, P_3 splňují vztah $X = x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3$ a podmínku $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

Pokud $x_i \geq 0, i = 1, 2, 3$, náleží bod X trojúhelníku P_1, P_2, P_3 .

8.4 Jednotlivé kroky řešení problému

8.4.1 Uvedení do problému

Vzhledem k plynulosti změn sledované chyby, můžeme předpokládat, že chybu na bodech ležících mezi známými body nejvíce ovlivní jeho nejbližší sousedé. Po vhodné triangularizaci konvexní obálky získáme trojúhelníkovou síť (její triangulaci). Pro jednotlivé mezilehlé body provedeme výpočet jeho opravy pomocí jeho barycentrických souřadnic a chybových vektorů vrcholů trojúhelníka, ve kterém tento bod leží. Tuto opravu postupně provedeme pro všechny body vstupní množiny bodů 14400_trans ležící v konvexní obálce triangulace.

8.4.2 Příprava dat

Celý výpočet probíhal v MATLABu v.5.1.. Ve výpočtu používáme data ze vstupních souborů ide_body.stx, id_body_trans.stx a 14400_trans.stx.

V přípravných skriptech kompl.m a 14400.m jsou uloženy instrukce pro inicializaci dat. Do proměnné x jsou zadána data popisující známé identické body potřebné k triangulaci. Rozměr této matice je 995x8. Sloupce 1 a 4 tvoří čísla jednotlivých bodů, byly použity při kontrole vstupních souborů. Ve sloupcích 2,3 a 5,6 jsou souřadnice

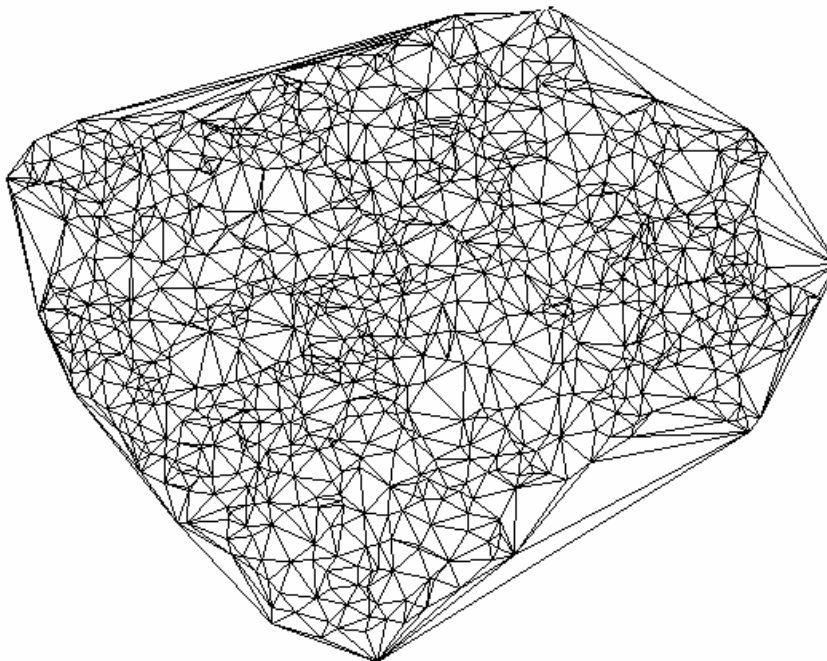
bodů `id_body_trans` a `id_body`. Sloupce 7,8 obsahují složky chybových vektorů pro dané body (rozdíl souřadnic bodů, tj. hodnot sloupců 5-2 a 6-3).

Proměnná `y` je matice o rozměrech 1166x3, jsou v ní uloženy údaje o bodech, u kterých potřebujeme získat opravu (`y(1)` – číslo bodu, `y(2,3)` - souřadnice).

Po naplnění těchto polí bylo třeba zkontrolovat, zda se jedná o identické body a posoudit, nebo zda na některých bodech nedošlo k hrubé chybě. Pomocí funkce `chyby.m` jsem našel 5 bodů, na kterých chyby svou velikostí několikanásobně převyšovaly hodnoty svého okolí (920020020, 924240026, 929010501, 929060012, 930140012). Po jejich vyřazení do výpočtu triangulace vstupovalo 990 bodů.

8.4.3 Triangularizace

Pro její vlastnosti jsem použil triangularizující algoritmus vytvářející Delaunayovu triangulaci. Tato aplikace nepotřebuje vkládat povinné hrany a vystačí s triangulací konvexní obálky vstupní bodové množiny (do konvexní obálky spadla většina bodů, které se měly transformovat, body vně nelze pomocí metod triangulace podobným způsobem řešit). Také její úhlové vlastnosti nám zaručují, že vznik dlouhých



Obr. 8.3: Delaunayova triangulace nad množinou vstupních bodů

trojúhelníků bude ojedinělý. Při triangulaci se jich objevilo pouze několik na hranicích jižní Moravy a Rakouska, kde však neleží téměř žádné transformované body. Těmto případům by se však nevyhnula žádná triangulace. Pro výpočet v MATLABu jsem použil funkci `tri=delaunay(x, y)`, která je součástí balíku MATLAB. Stejně výsledky dala funkce `tri=delaunay(x, y)` zmíněná dříve.

8.4.4 Výpočet opravy

Nyní můžeme přistoupit k vlastnímu určování chyb na bodech ze souboru 14400_trans. Ty jsou od inicializace uloženy v proměnné `y`. Výpočet chyby je prováděn funkcí `[ano,ne,p]=vypocet(x,y)`. Vstupem jsou množiny `x,y`, výstupy – `ano`-soubor opravených bodů, `p`-tyto body bez oprav, `ne`-body, které nelze transformovat. Nejprve se pomocí funkce `tri=delaunay(x,y)` vytvoří triangulace (výstup je matice 1990×3 indexů vrcholů trojúhelníků).

V cyklu postupně vkládáme body `y`, pro které počítáme souřadnice opraveného bodu. Nejprve pomocí funkce `t = tsearch(x,y,tri,xi,yi)` (vstupují množiny `x, y`, triangulace z `delaunay` a souřadnice opravovaného bodu `xi, yi`, z balíku MATLAB) najdeme index trojúhelníku, v němž leží.

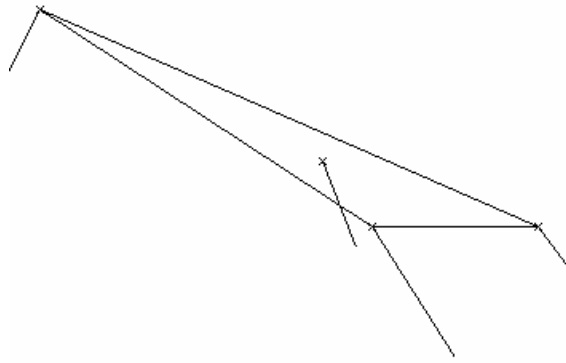
Pokud je výsledek této funkce index některého trojúhelníku (tj. tento bod leží v konvexní obálce množiny vstupních bodů `x`) provede se pomocí funkce `bod_chyba` oprava tohoto bodu a bod se uloží do `ano` a `p`. Pokud leží mimo konvexní obálku, nelze jej transformovat a uloží se do `ne`.

Následuje popis jednotlivých procedur:

8.4.4.1 Funkce `z=bod_chyba(p1,p2,p3,x)`

Hlavní procedura počítající souřadnice `z` opravovaného vstupního bodu `x` z barycentrických souřadnic a chybových vektorů ve vrcholech trojúhelníku `pi`, v němž opravovaný bod leží.

Nejprve vypočteme barycentrické souřadnice (funkce `barycentr`). Poté vezmeme jednotlivé chybové vektory vrcholů trojúhelníku a barycentrické souřadnice použijeme jako váhy.



Obr. 8.4: Oprava vnitřního bodu trojúhelníku pomocí barycentrických souřadnic

Verze bod_chyba1 je použitelná pro vizualizaci .

8.4.4.2 Funkce $[x_1, x_2, x_3] = \text{barycentr}(p_1, p_2, p_3, x)$

Vstupem jsou souřadnice vrcholů trojúhelníku p_i a bodu x ležícího v tomto trojúhelníku.

Výstupem jsou barycentrické souřadnice tohoto bodu - (x_1, x_2, x_3) .

Nejprve vypočteme směrové vektory jednotlivých stran, pomocí kterých zjistíme vzdálenost bodu x od jednotlivých stran (funkce d_bod_primka). Poté stejně spočteme vzdálenosti příslušných protilehlých vrcholů.

Barycentrické souřadnice získáme jako poměr vzdáleností tohoto bodu a příslušného protilehlého vrcholu od hrany trojúhelníku.

8.4.4.3 Funkce $d = d_bod_primka(s, a, x)$

Vstupem je směrový vektor přímky s , jeden její bod a a bod x . Výstupem je vzdálenost bodu x od přímky.

Určíme normálový vektor této přímky. S jeho pomocí získáme patu kolmice přímky vedené bodem x . Vzdálenost tohoto průsečíku a x je hledaná vzdálenost.

8.4.4.4 Funkce $k = \text{bod_troj}(p_1, p_2, p_3, x)$

Procedura má výstup $k=1$ pokud bod x leží uvnitř trojúhelníku určeného vrcholy p_i , $k=0$, pokud leží vně.

Výpočet je prováděn jako kontrola součtu barycentrických souřadnic.

(podmínka $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.)

8.4.4.5 Funkce $D=vzdalenost(X,Y)$

Počítá euklidovskou vzdálenost dvou bodů.

8.4.4.6 Funkce $[ano,ne,p]=vypocet(x,y)$

Hlavní tělo výpočtu, popsáno výše.

8.4.4.7 Funkce $zobraz(ano,ne,p,x,y)$

Zobrazí výsledky výstupu předchozí funkce:

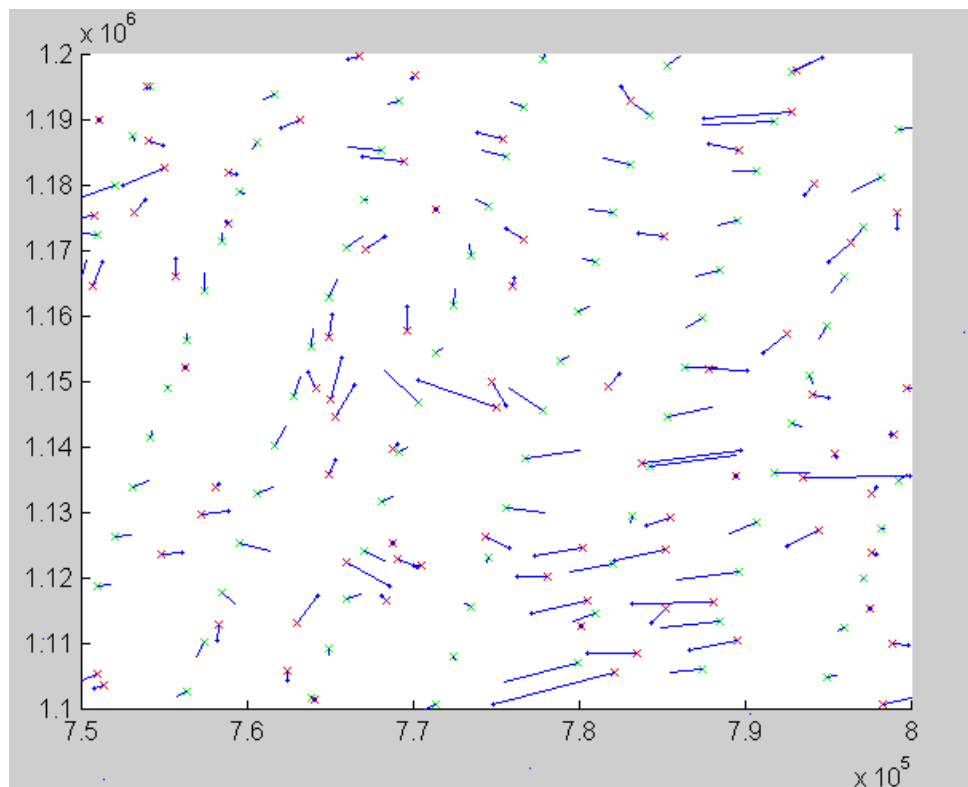
červené body – netransformovatelné body,

zelené body + vektor – transformované body z množiny y a chybové vektory,

červené křížky + vektor – body množiny x chybové vektory.

Okno výřezu je voleno tak, aby mohly být zobrazeny všechny body množiny y.

Jednoduchou změnou v příkazu axis lze vizualizovat jakoukoliv oblast.



Obr. 8.5: Výřez znázorňující opravené body množiny y pomocí bodů množiny x

8.4.5 Možnosti vstupu

Hlavním cílem této aplikace byl výpočet transformace bodů ze seznamu 14400_trans.stx. Tento svůj účel splnila. Navíc jsem ji doplnil o dvě funkce umožňující vstup dalších bodů pro transformaci.

8.4.5.1 Funkce $q=linie(x1,x2,x,krok)$

Vstupy této funkce jsou počáteční a koncový bod úsečky $x1, x2$, body množiny x a krok k . Výstupem je vektor y obsahující opravené vnitřní body vstupní úsečky s diferencí $krok$.

Dalším výstupem této funkce je vizualizace bodů této přímky a jejich chybových vektorů doplněné o znázornění chybových vektorů okolních bodů množiny x .

8.4.5.2 Funkce $q=polygon(z, x, krok)$

Funkce analogická předchozí. Na rozdíl od minulé je jejím vstupem vektor bodů ke transformaci tvořící polyline. Výstupní bodové pole je složeno z opravených bodů této polyline. Také zde je připojena vizualizace výsledků.

8.5 Zhodnocení přesnosti

Pro zhodnocení přesnosti jsem zvolil jako kritérium relativní rozdíly obvodů jednotlivých trojúhelníků triangulace porovnaných pro seznamy souřadnic $y', x'(S-JTSK)$ a $y, x(S-JTSK)$. Vyhodnocení těchto hodnot je zpracováno v následující tabulce:

| relativní diference [cm/km] | do 1 | 1 - 5 | 5 - 10 | 10 - 15 | 15 - 20 | 20 - 25 | 25 - 30 | nad 30 |
|--------------------------------|------|-------|--------|---------|---------|---------|---------|--------|
| počet trojúhelníků | 200 | 730 | 492 | 260 | 117 | 70 | 32 | 59 |

Tab. 8.1: Tabulka četností relativních diferencí obvodů trojúhelníků

Průměrná hodnota této diference je 8,0023 cm/km.

Metoda triangulace je použitelná na území celé konvexní obálky. Delaunyova triangulace je na ní jednoznačně určena a může tedy sloužit jako klíč pro transformaci vnitřních bodů. Body byly rozmístěny po území celé České republiky, problematické řešení některých bodů vzniklé na některých rozích fundamentálních listů je dáno výskytem tenkých trojúhelníků na hranicích s Rakouskem (tyto transformované body

jsou však již na území Rakouska). Na nich je chybový vektor ovlivněn body, které mají od bodu transformovaného relativně velkou vzdálenost.

Pro řešení tohoto problému však již nelze použít triangularizujících algoritmů (triangulace je dána rozložením bodů vstupní množiny a těmto trojúhelníkům se nelze vyhnout). Možnou metodou dávající lepší výsledky by mohla být např. metoda *k*-nejbližšího souseda, kdy by hodnota opraveného vektoru byla ovlivněna jeho nejbližšími sousedy. Jako jejich váhy by se použilo inverzních vzdáleností. Tento algoritmus (hledání nejbližších sousedů) je paměťově velmi náročný. Lze jej však upravit např. nashlukováním některou metodou shlukové analýzy.

9 Přehled www stránek s tematikou triangulací a DMT

Přestože na internetu je stránek o této problematice mnoho, českých stránek se zdroji jsem našel pouze několik:

http://mujweb.cz/Pocitace/martinhorak/onv_cz.htm

Stránka studenta ČVUT obsahující dokument popisující využití triangulací.

http://kix.fsv.cvut.cz/~vanicek/vyuka_z00/is22-9.htm

Stránka věnovaná výuce výpočetní geometrie na ČVUT, obsahuje práce zabývající se prostorovými daty, triangulacemi a DMT.

http://iason.zcu.cz/~kolinger/kolinger_c.html

Stránky I. Kolingerové, nabízí ke stažení tři práce zabývající se triangulacemi ve vztahu k počítačové grafice.

<http://cecwi.fsv.cvut.cz/GIS/fotogram.htm>

Přednáška o získávání zdrojů fotogrammetrickou cestou, možnosti tvorby DMT.

Zahraniční zdroje

<http://www.voronoi.com/IndexNoframes.htm>

Patrně nejobsáhlejší stránka věnovaná Voronoiovým metodám. Jsou zde odkazy na jejich aplikace v mnoha oborech. Pro obsah této práce měly význam zejména odkazy:

[http://www.voronoi.com/application.htm#Terrain Modelling](http://www.voronoi.com/application.htm#Terrain%20Modelling)

<http://www.voronoi.com/application.htm#Geography>

Navíc je zde velké množství implementací na

<http://www.voronoi.com/implementation.htm>

<http://www.cs.cmu.edu/afs/cs/user/garland/www/scape/>

Na této stránce jsou informace o literatuře zabývající se tematikou Delaunayovy triangulace a Voronoiových diagramů. Mnoho materiálů je určeno přímo ke stažení.

<http://www-sop.inria.fr/prisme/fiches/Geologie/english.html>

Stránka zabývající se uplatněním Voronoiových metod v geologii při tvorbě geologických modelů.

<http://www.geom.umn.edu/software/cglist/> hlavní strana

Directory of Computational Geometry Software – mnoho implementací, mj. ke stažení nabízen MATLABovský toolbox CaGa (balík pro výpočetní geometrii).

<http://compgeom.cs.uiuc.edu/~jeffe/compgeom/code.html>

Computational Geometry Code – velké množství zdrojových kódů algoritmů výpočetní geometrie.

<http://www.geo.uni-bonn.de/members/haack/gis-dem.html>

Digital elevation models (DEM) stránka zabývající se problematikou DMT a GIS.

<http://www.gris.uni-tuebingen.de/gris/proj/dt/dteng.html>

Popis Delaunayovy triangulace a Voronoiova diagramu, srovnání a vyhodnocení některých triangularizujících algoritmů.

Závěr

V první části podává tato práce souhrn poznatků o triangulacích. Nejprve uvádí kritéria posuzování její kvality. Postupně definuje jednotlivé potřebné pojmy a dostává se k Delaunayově triangulaci a Voronoiovu diagramu. Zvláštní kapitolu získal také popis Voronoiových diagramů, jejich vlastností a možnosti jejich využití pro potřeby geografických informačních systémů. Tento přehled pouze nastiňuje jejich využití v této oblasti, mnoho dalších informací lze nalézt například na [www stránkách](#) uvedených v poslední kapitole této práce.

V další části popisuje základní triangularizační metody, nejprve nenasatnou triangulaci a triangularizaci polygonu. Největší část práce je věnována algoritmům konstrukce Delaunayovy triangulace používané v GISech nejčastěji. Jsou uvedeny datové struktury používané pro triangulace a dvě funkce jako praktická ukázka algoritmů triangulace vytvořené v MATLABu.

Kapitola o rekonstrukci a digitálním modelu terénu začíná definicí pojmů DMT a popisem základních datových struktur používaných pro modelování terénu, zmiňuje se též o možnostech získávání dat pro jeho tvorbu. Zaměřuje se zejména na TIN. Uvádí se zde také některé metody převodu použitelné při tvorbě TINu a základní operace, které je možné vykonávat nad TINem. Popis rekonstrukce je zaměřen na tvorbu digitálního modelu terénu se znalostí metrických informací jako doplňku k rovinné triangulaci (jedná se zde o šikmé vzdálenosti a výškové úhly). Nejprve se zabývá možnostmi vyrovnání takovýchto hodnot a následuje využití těchto údajů pro výpočet výškové souřadnice.

Praktickou částí této práce bylo využití triangularizujících algoritmů na transformaci nehomogenních souřadnic. Nejprve uvádí přehled informací o vstupních datech. Následuje řešení úkolu pomocí Delaunayovy triangulace. Následuje shrnutí výsledků a návrh metody použitelné jak pro řešení problematických okrajových částí tak i pro možné řešení na množině vstupních dat.

Poslední část tvoří seznam odkazů na [www stránky](#) zabývající se tematikou triangulací, digitálními modely terénu a geografickými informačními systémy.

V kompilačních kapitolách 2-5 jsem pracoval zejména s literaturou [Blaž94] (definice týkající se triangulací, některé jejich vlastnosti a algoritmy), [Koli99] (vlastnosti a algoritmy, datové struktury), [HorM00] (algoritmy), v podkapitolách o Voronoiových metodách pak s [DeBe97] a [Krev97].

Pro sestavení kapitoly 7 jsem používal [Tuče98] (datové reprezentace, TINy), [Maye95] (zdroje dat), [DeBe97] (převody reprezentací), [Cimb99] (vyrovnání rovinné triangulace).

V kapitole 8 pro informace o vstupních datech [Čada00], definice barycentrických souřadnic [Ježe99]. Terminologicky jsem se držel [Tesl98].

Literatura

- [Bald96] Balda, M: Úvod do MATLABu
ZČU Plzeň, 1999
- [Blaž94] Blažek, D.: Diplomová práce
ZČU Plzeň, 1999
- [Cimb99] Cimbálník, M., Mervart, L.: Vyšší geodézie 1
ČVUT Praha, 1999
- [Čada00] Čada, V.: Využití geodetických základů stabilního katastru, historie, vznik a vývoj mílových tabulek
ZČU Plzeň, 2000
- [DeBe97] de Berg, M., van Kreveld, M., Overmars, M., Schwarzkopf, O.:
Computational Geometry. Algorithms and Applications
Berlin, Springer 1997
- [Hole95] Holenda, J., Ryjáček, Z.: Lineární algebra II
ZČU Plzeň, 1995
- [HorJ98] Horák, J.: Zpracování dat v GIS
VŠT-TU Ostrava, 1998
- [HorM00] Horák, M.: Triangulační metody pro generování ornamentů
ČVUT Praha, 2000
- [Ježe99] Ježek, F.: Geometrické a počítačové modelování
ZČU Plzeň, 1999
- [KolJ97] Kolář, J.: Geografické informační systémy
ČVUT Praha, 1997
- [Koli99] Kolingerová, I.: Metody triangularizace v rovině – technická zpráva
ZČU Plzeň, 1999
- [Krev97] van Kreveld, M., Nievergelt, J., Roos, T., Widmayer, P. (Ed.):
Algorithmic Foundations of Geographic Information Systems
Berlin, Springer 1997
- [Maye95] Mayer, P.: Počítačové modelování krajiny
ČVUT Praha, 1995
- [Psut01] Psutka, J.: Učící se systémy a klasifikátory
ZČU Plzeň, 2001
- [Rata99] Rataj, J., Diferenciální geometrie křivek a ploch
ČVUT Praha, 1999

- [Tesl98] Terminologický slovník geodézie, kartografie a katastra
Bratislava 1998
- [Tuče98] Tuček, J.: Geografické informační systémy
Computer Press Praha, 1998