

Západočeská univerzita v Plzni  
Fakulta aplikovaných věd  
Katedra matematiky

## **Diplomová práce**

# **Upřesnění dráhy české družice MIMOSA**

**Plzeň, 2004**

**Vojtěch Šrejber**

# Poděkování

Rád bych na tomto místě poděkoval panu Prof. Ing. Josefu Kabeláčovi, Csc., vedoucímu mé diplomové práce, za ochotné poskytnutí řady studijních materiálů a konzultací i za příjemnou spolupráci.

# Upřesnění dráhy české družice MIMOSA.

## **Abstrakt:**

Diplomová práce se zabývá pohybem umělé družice obíhající kolem Země. Na ni působí řada poruchových vlivů, které ji vychylují z eliptické dráhy. Nejvýznamější z nich jsou zde popsány a působení gravitačního pole Země a Měsíce a Slunce je zahrnuto do výpočetního programu. Vypočítané dráhové elementy jsou v další části konfrontovány se souřadnicemi přímo měřenými aparaturou GPS umístěnou na palubě družice. Jsou sestaveny zprostředkující rovnice a dochází k vyrovnání dráhových elementů metodou nejmenších čtverců. Zvláštní pozornost je věnována české družici MIMOSA.

## **Klíčová slova:**

umělé družice Země, keplerovy zákony, dráhové elementy, numerická integrace, rušený pohyb, poruchy od Země, poruchy od Měsíce a Slunce, zprostředkující rovnice, metoda nejmenších čtverců, MIMOSA

<b>PODĚKOVÁNÍ</b> .....	<b>3</b>
<b>ABSTRAKT</b> .....	<b>4</b>
<b>PROHLÁŠENÍ</b> .....	<b>7</b>
<b>ÚVOD</b> .....	<b>8</b>
<b>1. NERUŠENÝ POHYB DRUŽICE</b> .....	<b>9</b>
1.1 KEPLEROVY ZÁKONY .....	9
1.2 POHYBOVÉ ROVNICE .....	9
1.3 DRÁHOVÉ ELEMENTY .....	10
<b>2. RUŠENÝ POHYB DRUŽICE</b> .....	<b>12</b>
2.1 POHYBOVÉ ROVNICE .....	12
2.2 NUMERICKÁ INTEGRACE .....	12
<b>3. PORUCHY DRÁHY DRUŽICE</b> .....	<b>15</b>
3.1 GRAVITAČNÍ PORUCHY.....	15
3.1.1 <i>Vliv gravitačního pole Země</i> .....	15
3.1.1.1 <i>Rozdělení sférických funkcí podle geometrického významu</i> .....	16
3.1.1.2 <i>Vliv gravitačního pole Měsíce a Slunce</i> .....	17
3.1.1.3 <i>Vliv rotačních deformací Země</i> .....	17
3.2 NEGRAVITAČNÍ PORUCHY .....	18
3.2.1 <i>Vlivy atmosféry</i> .....	18
3.2.2 <i>Vliv slunečního záření a funkce stínu</i> .....	19
3.2.2.1 <i>Vliv radiace</i> .....	21
3.3 PŘEHLED DRUHŮ PORUCH .....	21
<b>4. ZÁKLADNÍ POZNATKY VYROVNÁVACÍHO POČTU</b> .....	<b>22</b>
4.1 METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ .....	22
4.2 VYROVNÁNÍ ZPROSTŘEDKUJÍCÍCH MĚŘENÍ.....	23
<b>5. PRAKTICKÉ APLIKACE VÝPOČETNÍCH PROGRAMŮ</b> .....	<b>26</b>
5.1 NUMERICKÁ INTEGRACE .....	26
5.2 VLIV GRAVITAČNÍHO POLE ZEMĚ .....	29
5.2.1 <i>Výpočty vlivu gravitačního pole Země</i> .....	32
5.3 GRAVITAČNÍ VLIV MĚSÍCE A SLUNCE .....	34
5.3.1 <i>Výpočty vlivu gravitačního pole Měsíce a Slunce</i> .....	35
5.4 URČOVÁNÍ DRÁHOVÝCH ELEMENTŮ VYROVNÁNÍM ZPROSTŘEDKUJÍCÍCH MĚŘENÍ. ....	37
5.4.1 <i>Sestavení linearizovaných rovnic oprav</i> .....	37
5.4.2 <i>Sestavení linearizovaných zprostředkujících rovnic</i> .....	38
5.4.2.1 <i>Vytvoření totálních diferenciálů</i> .....	38
5.4.2.2 <i>Parciální derivace</i> .....	39
5.4.2.3 <i>Linearizované rovnice oprav</i> .....	40
5.4.3 <i>Konkrétní příklad vyrovnání dráhových elementů</i> .....	40
<b>6. VÝPOČTY PRO PŘÍPAD DRUŽICE MIMOSA</b> .....	<b>43</b>
6.1 KEPLEROVSKÝ POHYB .....	43
6.2 VLIV GRAVITAČNÍHO POLE ZEMĚ .....	44
6.3 GRAVITAČNÍ VLIV MĚSÍCE A SLUNCE .....	45
<b>ZÁVĚR</b> .....	<b>47</b>
<b>POUŽITÁ LITERATURA</b> .....	<b>48</b>
<b>PŘÍLOHY</b> .....	<b>49</b>
A1 SEZNAM KONSTANT.....	49
A2 PROGRAMOVÁ DOKUMENTACE.....	50
A2.1 <i>Program integr</i> .....	50

<i>A2.1 Program vyrovnani</i> .....	51
A3 VÝPISY ZDROJOVÝCH KÓDŮ PROGRAMŮ .....	53
<i>A3.1 integr.dpr</i> .....	53
<i>A3.2 un_NI.pas</i> .....	53
<i>A3.3 vyrovnani.dpr</i> .....	61
<i>A3.4 Un_MNC.pas</i> .....	61
A4 OBSAH CD .....	68

# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne 30. května 2004

.....  
podpis autora

# Úvod

Tématem této diplomové práce je pohyb umělých družic kolem Země a zpřesňování jejich souřadnic. Výpočty, které bylo třeba k tomuto cíli provést, jsem prováděl pomocí programů vytvořených ve vývojovém prostředí Delphi.

První kapitola pojednává o nerušeném pohybu družic a slouží spíše jako nutné teoretické minimum, které je nutné k pochopení dalších úvah. Je zde pojednáno o Keplerových zákonech, jsou tu uvedeny pohybové rovnice a vysvětlen pojem dráhových elementů.

Ve druhé kapitole se již zabývám reálnou situací, při které se družice nepohybují po eliptických drahách, ale jsou – z nejrůznějších příčin – z těchto drah vychylovány na dráhy odpovídající víceméně obecné křivce. Dále zde teoreticky popisují metodu numerické integrace, která takový pohyb řeší. Konkrétně se jedná o metodu Runge-Kuttovu, která je také implementována pomocí programu `integr.exe`.

Třetí kapitola popisuje nejvýznamnější poruchy působící na dráhu družice, a to jak gravitačního tak negravitačního charakteru. Nejpodrobněji jsou popsány poruchové vlivy gravitačního pole Země a gravitačního pole Měsíce a Slunce, pro jejichž výpočty jsem opět sestavil výpočetní programy.

Čtvrtá kapitola je věnována metodě nejmenších čtverců a vyrovnání zprostředkujících veličin. Na teoretických základech zde popsaných je následně postavena úloha zpřesňování vypočtených dráhových elementů, jsou-li známy souřadnice přímo měřené aparaturou GPS umístěné na palubě družice. Tento výpočet se děje postupným vyrovnáváním pomocí sestaveného programu `vyrovnani.exe`.

Zatímco předchozí kapitoly se zabývaly především teorií a jednotlivé příklady řešily spíše obecně, kapitola pátá již testuje sestavené výpočetní programy na konkrétních datech, přičemž se zaměřuje především na porovnání s výsledky jiných autorů.

V poslední šesté kapitole jsou pomocí výše uvedených programů sledovány průběhy poruch na dráze družice MIMOSA.

Nedílnou součástí této diplomové práce je příložené CD, které obsahuje použité programy.

# 1. Nerušený pohyb družice

Dříve než přistoupíme k popisu poruchových vlivů na dráhu družice, budeme se zabývat jednodušším případem nerušeného (keplerovského) pohybu družice. Jedná se o případ, kdy planeta i její družice jsou považovány za hmotné body, jejichž dráhu ovlivňuje pouze gravitační síla, kterou působí na sebe navzájem. Ostatní gravitační poruchy, jako zejména vliv nepravidelného rozložení hmoty Země a další, ani poruchy negravitačního charakteru zde nejsou zahrnuty.

## 1.1 Keplerovy zákony

Keplerovy zákony popisují nerušený pohyb tělesa  $m$  obíhajícího kolem tělesa  $M$ . Dnes se Keplerovy zákony uvádějí ve tvaru:

1. Planety se pohybují v elipsách blízkých kružnicím o společném ohnisku ve Slunci. (Přesněji: ... o společném těžišti v těžišti sluneční soustavy.)
2. Plošná rychlost, tj. plocha průvodiče opsaná na jednotku času, je konstantní.
3. Poměr druhé mocniny oběžné doby vzhledem k třetí mocnině hlavní poloosy je konstantní.

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \quad (1.1)$$

Tyto zákony byly Keplerem odvozeny na základě četných pozorování, především planety Marsu. Jejich teoretický důkaz poskytl až Newtonův gravitační zákon. Ten také umožnil zákony zobecnit na jakoukoli dvojici těles, na které nepůsobí žádné jiné síly.

## 1.2 Pohybové rovnice

Základem pro odvození pohybových rovnic je Newtonův gravitační zákon popisující silové působení dvou hmotných bodů o hmotnostech  $M$  a  $m$ , který je vyjádřen rovnicí:

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^3} \cdot \vec{r} \quad (1.2)$$



V tomto vztahu je  $G$  Newton-Cavendishova gravitační konstanta ( $G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ ),  $M$  udává hmotnost centrálního tělesa (Země) a  $m$  hmotnost tělesa obíhajícího (družice),  $\vec{r}$  je vektor vzájemné polohy těles  $M$  a  $m$  v pravouhlé souřadnicové soustavě s počátkem v bodě  $M$ . Znaménko mínus udává směr vektoru síly působící na těleso  $m$  za předpokladu, že vektor  $\vec{r}$  směřuje od tělesa  $m$  k tělesu  $M$ .

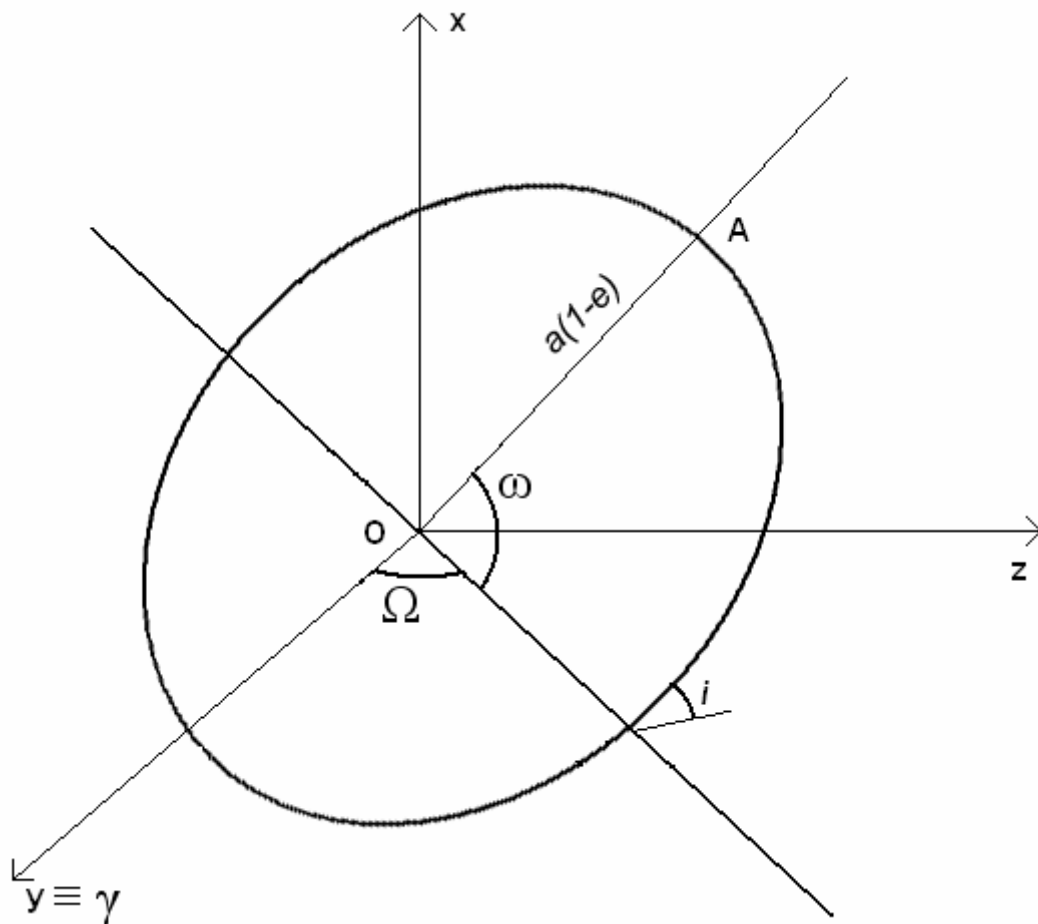
Ze vztahu (1.2) lze odvodit tři pohybové rovnice

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\mu \cdot \frac{x}{r^3} \\ \ddot{y} &= -\mu \cdot \frac{y}{r^3} \\ \ddot{z} &= -\mu \cdot \frac{z}{r^3}\end{aligned}\tag{1.3}$$

Konstanta  $\mu = k^2 \cdot (M + m)$  je gravitační konstanta družice  $m$ ,  $k^2$  je Newton-Cavendishova konstanta. Tyto rovnice popisují pohyb tělesa  $m$  vůči tělesu  $M$  v pravouhlé souřadnicové soustavě  $(x, y, z)$  s počátkem v  $M$ . Řešením těchto rovnic získáme šest integračních konstant, které představují soustavu dráhových elementů.

### 1.3 Dráhové elementy

Dráhovými elementy rozumíme soustavu šesti na sobě nezávislých parametrů, které jednoznačně popisují pohyb družice při nerušeném pohybu. Klasické keplerovy elementy tvoří šestice  $(a, e, \tau, \Omega, \omega, i)$ . Elementy  $a, e$  charakterizují tvar elipsy, po které družice obíhá –  $a$  je velikost hlavní poloosy a  $e$  excentricita. Element  $\tau$  udává čas průchodu družice rovinou perigeem. Elementy  $\omega, \Omega, i$  určují polohu elipsy v prostoru.  $\Omega$  se nazývá rektascenze výstupního uzlu a je to odchylka průsečnice roviny elipsy s rovinou rovníku od kladné poloosy  $x$  souřadnicového systému vztaženého k jarnímu bodu,  $\omega$  je odchylka průvodiče perigea (bodů, kdy je družice nejbližší geocentru) a element  $i$  udává sklon roviny dráhy vůči rovině ekliptiky. Grafické znázornění keplerovských dráhových elementů je znázorněno na obrázku (1.1)



*Obr. 1.1: Keplerovské dráhové elementy*

Místo klasických keplerovských elementů ( $a$ ,  $e$ ,  $\tau$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $i$ ) je možné použít také složek vektoru polohy a složek vektoru postupné rychlosti  $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  v libovolném bodě dráhy družice, které představují integrační konstanty získané řešením rovnic (1.3).

Pro nerušený pohyb jsou dráhové elementy konstantní. Pro pohyb rušený jsou ovšem funkcemi času.

## 2. Rušený pohyb družice

Jak již bylo napsáno, předchozí kapitola se zabývala nejjednodušším a značně zidealizovaným případem pohybu (umělých) družic Země. Ve skutečnosti ovšem působí na družice celá řada rušících vlivů, které ovlivňují její dráhu. To v praxi znamená, že se družice nepohybuje po elipse, jak to popisuje Keplerův zákon pro pohyb nerušený (kap. 1.1). Nejvýznamnější z nich budou podrobněji popsány v následující kapitole. Zde se budeme obecně zabývat jejich vlivem na podobu pohybových rovnic a jejich následným řešením.

### 2.1 Pohybové rovnice

Výchozím vztahem pro matematické vyjádření rušeného pohybu budou pohybové rovnice pro pohyb nerušený (1.3). Ty umožňují počítat druhou derivaci souřadnic průvodiče  $x, y, z$ , tedy zrychlení družice v daném čase. Zároveň však na družici působí různá poruchová zrychlení  $F_i$ , která lze sečíst a výsledek (přirozeně rozepsaný do složek  $F_x, F_y, F_z$ ) přičíst ke zrychlení keplerovského pohybu. Tímto dostaneme obecný zápis pohybových rovnic pro rušený pohyb družice:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \mu \cdot \frac{x}{r^3} + F_x \\ \ddot{y} &= \mu \cdot \frac{y}{r^3} + F_y \\ \ddot{z} &= \mu \cdot \frac{z}{r^3} + F_z\end{aligned}\tag{2.1}$$

### 2.2 Numerická integrace

U keplerovského pohybu můžeme počítat dráhové elementy družice (ať už keplerovské nebo pravoúhlé) analyticky pomocí počátečních dráhových elementů a rovnice elipsy. Působí-li však na družici rušivé vlivy, její dráha se mění a přechází v obecnou, matematicky nedefinovatelnou křivku. V takovém případě musíme řešit úlohu určení dráhových elementů družice některou z numerických metod aplikovanou na pohybové rovnice (2.1). Základní úlohu numerického řešení diferenciálních rovnic prvního řádu s počáteční podmínkou zapíšeme obecně ve tvaru

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), t) \\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}\quad (2.2)$$

kde budeme hledat funkci  $x(t)$ . Pro řešení bylo použito klasické Runge-Kuttovy, což je metoda jednokroková čtvrtého řádu. Předpis příslušného algoritmu je

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 &= f(t_n, x_n) \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}hk_2\right) \\ k_4 &= f(t_n + h, x_n + hk_3)\end{aligned}\quad (2.3)$$

Jak je vidět, pro výpočet funkčních hodnot  $x_n$  v čase  $t_n$  je nutno znát pouze hodnoty předcházejícího kroku  $x_{n-1}$ ,  $t_{n-1}$  a velikost kroku  $h$ . Pro úplnost dodejme, že v rovnici (2.2) můžeme považovat  $x$  za vektor a  $f$  za vektorovou funkci a metoda lze potom aplikovat i na soustavu diferenciálních rovnic s podmínkou.

Abychom mohli použít tuto metodu na pohybové rovnice (2.1), musíme je nejprve převést na diferenciální rovnice prvního řádu. Protože se jedná o rovnice ve tvaru

$$\ddot{x} = f(x) \quad (2.4)$$

použijeme zde klasickou substituci

$$\begin{aligned}s_{x1} &= x \\ s_{x2} &= \dot{x} \Rightarrow \dot{s}_{x2} = \ddot{x} \\ s_{y1} &= y \\ s_{y2} &= \dot{y} \Rightarrow \dot{s}_{y2} = \ddot{y} \\ s_{z1} &= z \\ s_{z2} &= \dot{z} \Rightarrow \dot{s}_{z2} = \ddot{z}\end{aligned}\quad (2.5)$$

a pohybové rovnice (2.1) můžeme zapsat jako

$$\begin{aligned}\dot{s}_{x1} &= s_{x2} & \dot{s}_{x2} &= \mu \frac{s_{x1}}{(s_{x1}^2 + s_{y1}^2 + s_{z1}^2)^{\frac{3}{2}}} + F_x \\ \dot{s}_{y1} &= s_{y2} & \dot{s}_{y2} &= \mu \frac{s_{y1}}{(s_{x1}^2 + s_{y1}^2 + s_{z1}^2)^{\frac{3}{2}}} + F_y \\ \dot{s}_{z1} &= s_{z2} & \dot{s}_{z2} &= \mu \frac{s_{z1}}{(s_{x1}^2 + s_{y1}^2 + s_{z1}^2)^{\frac{3}{2}}} + F_z\end{aligned}\quad (2.6)$$

s počátečními podmínkami:

$$\begin{aligned} s_{x1} &= x_0 & s_{x2} &= v_{x0} \\ s_{y1} &= y_0 & s_y &= v_{y0} \\ s_{z1} &= z_0 & s_{z2} &= v_{z0} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Hodnoty  $x_0, y_0, z_0, v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}$  jsou počáteční pravoúhlé dráhové elementy příslušné času  $t_0$ .

Tuto úlohu prakticky řeší program `integr`, který se nachází na přiloženém CD.

## 3. Poruchy dráhy družice

Poruchy dráhy družice označují rozdíl mezi ideální (eliptickou) a skutečnou dráhou družice. U řady z nich můžeme pozorovat periodický průběh a z tohoto hlediska je dělíme na poruchy krátkoperiodické, dlouhoperiodické a sekulární (věkovité). Další rozdělení poruchových vlivů souvisí s jejich svázaností s poruchovým potenciálem. Rozlišujeme tak poruchy gravitační (též konzervativní) a negravitační (nekonzervativní).

### 3.1 Gravitační poruchy

Gravitační (nebo také konzervativní) poruchy způsobují síly gravitačního charakteru, které lze vyjádřit pomocí funkce poruchového potenciálu  $R = R(x, y, z)$ , resp.  $R = R(r, \varphi, \lambda)$ . Nejsilnější z gravitačních poruch jsou způsobeny nehomogeností gravitačního pole Země. Následují působení gravitace Měsíce a Slunce, slapové vlivy, vlivy precese, nutace a pohybu pólů a relativistické jevy.

#### 3.1.1 Vliv gravitačního pole Země

Pro keplerovský pohyb družice bylo nutno považovat zemské těleso za homogenní kouli a jeho gravitační pole za středově souměrné, což ovšem nevystihuje skutečný stav. Výstižný pro popis gravitačního pole Země je geoid, který však nelze definovat matematicky. Používá se tedy tzv. poruchový gravitační potenciál Země. Ten vyhovuje Laplaceově rovnici

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (3.1)$$

vyjádřené ale ve sférických souřadnicích. Získáváme tedy parciální diferenciální rovnici druhého řádu, která má nekonečně mnoho řešení. Dosti složitým odvozením lze získat vyjádření poruchového gravitačního potenciálu ve tvaru řady sférických funkcí:

$$R = \frac{\mu}{r} \sum_{l=2}^{\infty} \left( \frac{a_{\oplus}}{r} \right)^l \sum_{m=0}^n [C_l^m \cos(m\lambda) + S_l^m \sin(m\lambda)] \cdot P_l^m(\sin \phi) \quad (3.2),$$

kde  $\mu$  značí geocentrickou gravitační konstantu,  $a_{\oplus}$  střední poloměr Země a  $\varphi, \lambda, r$  geocentrické souřadnice družice.  $C_l^m$  a  $S_l^m$  jsou bezrozměrná čísla, tzv. harmonické geopotenciální (Stokesovy) koeficienty,  $P_l^m(\sin \phi)$  Legendreovy přidružené funkce (pro  $m \neq 0$ ), resp. Legendreovy polynomy (pro  $m = 0$ ). Indexy  $m$  udávají stupeň a index

$l$  řád. Hodnoty harmonických geopotenciálních koeficientů jsou tabelovány až pro stupeň a řád 360. Pro výpočet Legendrových polynomů platí tzv. Rodriguesův vzorec

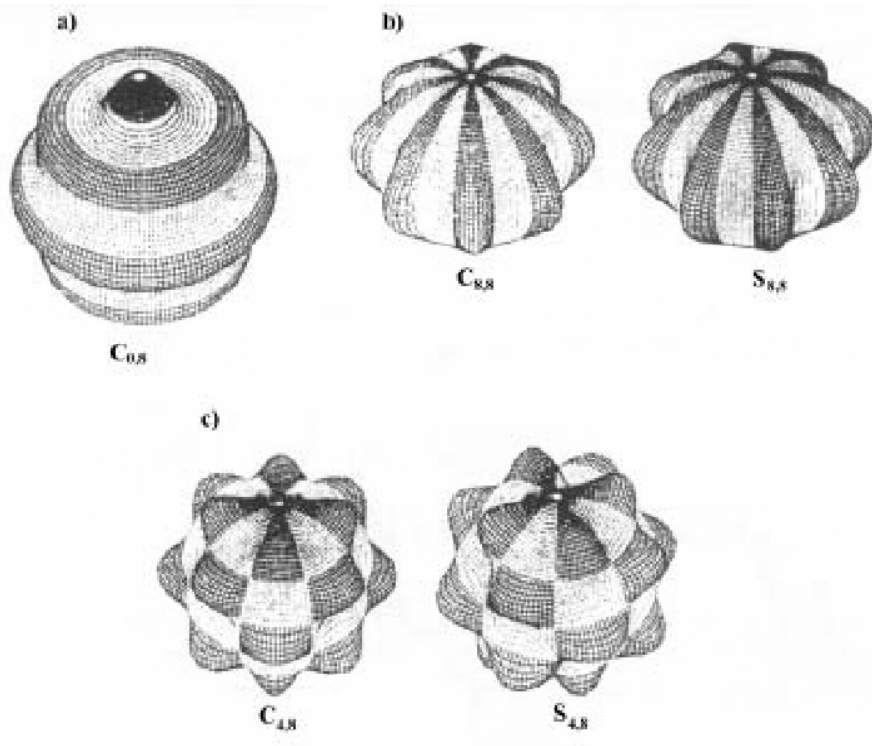
$$P_l^0(\sin \phi) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l \left[ (\sin^2 \phi - 1)^l \right]}{d\phi^l} \quad (3.3)$$

a pro výpočet Legendrových přidružených funkcí vzorec

$$P_l^m(\sin \phi) = (1 - \sin^2 \phi)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m [P_l^0(\sin \phi)]}{d\phi^m} \quad (3.4)$$

### 3.1.1.1 Rozdělení sférických funkcí podle geometrického významu

Vztah (3.2) nabývá při různých volbách stupně a řádu  $m$ ,  $l$  speciálních podob, kterým odpovídají příslušné geometrické interpretace.



Obr. 3.1: Geometrické znázornění sférických funkcí

Při volbě řádu  $m = 0$  přejde sférická funkce pouze v Legendreův polynom, který závisí pouze na  $\phi$  a nikoli na  $\lambda$ . Tento polynom má  $l$  reálných kořenů na intervalu  $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ , které definují  $l$  rovnoběžek o konstantní  $\phi$ . Tak vznikne  $l + 1$  oblastí (zón), které střídavě nabývají kladných a záporných hodnot. Těmto funkcím se říká funkce zonální. Další speciální případ nastává při volbě  $m = l$ . V takovém případě je sféra rozdělena do  $m$  poledníkových pásů, opět s pravidelně se střídajícími znaménky. Tyto funkce se nazývají sektorální. Pro ostatní hodnoty stupně a řádu, tedy pro  $l \neq 0$  a  $l \neq m$ , platí, že funkce, zvané v tomto případě teserální,

rozdělují sféru na sférické čtyřúhelníky resp. trojúhelníky (v oblastech kolem pólů). Geometrické znázornění sférických funkcí pro výše popsané případy volby stupně a řádu popisuje obr. (3.1).

### 3.1.2 Vliv gravitačního pole Měsíce a Slunce

Dosud jsme se zabývali úlohou umělých družic Země pouze jako problémem dvou těles. Ve skutečnosti ovšem na soustavu Země – družice působí další gravitační vlivy, především působení gravitačních sil Měsíce a Slunce. Nejvýznamnější jsou jejich přímé gravitační vlivy. Bude tedy nutné počítat gravitační potenciály. K jeho výpočtu musíme znát pro daný čas kromě polohy družice také polohu Měsíce a Slunce. Vzorec pro výpočet gravitačního potenciálu Měsíce pak bude:

$$R_M = \mu_M \left( \frac{1}{\rho_M} - \frac{xx_M + yy_M + zz_M}{r_M^3} \right) \quad (3.5),$$

kde  $\mu_M$  je selenocentrická gravitační konstanta,  $\rho_M$  vzdálenost mezi těžištěm družice a těžištěm Měsíce,  $xx_M, yy_M, zz_M$  souřadnice Měsíce v rovníkové souřadnicové soustavě a  $r_M^3$  je geocentrický průvodič těžiště Měsíce. Analogickým způsobem sestavíme rovnici pro Slunce:

$$R_S = \mu_S \left( \frac{1}{\rho_S} - \frac{xx_S + yy_S + zz_S}{r_S^3} \right) \quad (3.6)$$

Výsledné jevy potom můžeme sečíst. Obdobným způsobem by se postupovalo při výpočtu gravitačních vlivů dalších těles, které jsou ovšem tak malé, že je můžeme zanedbat.

Kromě přímého gravitačního působení Měsíce a Slunce na dráhu družice, deformují lunisolární gravitační síly zemské těleso a tím způsobují změny jeho gravitačního pole. Tyto tzv. slapové poruchy způsobují jednak pohyby vodních mas v oceánech, jednak deformace samotné Země. Tento problém je často zjednodušován tím, že je Země brána jako dokonale tuhé těleso a počítá se pouze slapový potenciál. Je-li uvažován fakt, že Země je ve skutečnosti elastická a působením slapů v ní dochází k přesunům hmot, musíme počítat ještě zbytkový potenciál. Tuto úlohu lze řešit pomocí tzv. Loveových čísel, které popisují elastické odezvy uvnitř zemského tělesa na působení slapů Měsíce a Slunce.

### 3.1.3 Vliv rotačních deformací Země

Mezi gravitační poruchy působící na dráhu družic patří také poruchy způsobené změnami tvaru Země v důsledku periodického pohybu osy rotace Země vůči zemské kůře. Tento pohyb



má periodu zhruba 433 dny a zemské póly se v jejím důsledku pohybují po přibližně kruhové dráze o proměnném poloměru řádově v metrech. Tvarovým deformacím podléhá také vektor rotace. Tento efekt se nazývá sezónní kolísání rychlosti rotace.

### 3.2 Negravitační poruchy

Negravitační poruchy dráhy umělých družic Země jsou způsobeny nekonzervativními silami, tedy silami, které nelze vyjádřit pomocí silového potenciálu. V následujících odstavcích se podrobněji zmíním o dvou nejvýznamnějších: o vlivu odporu atmosféry a o tlaku slunečního záření.

#### 3.2.1 Vlivy atmosféry

Na družici obíhající kolem Země působí odpor atmosféry, a to působí proti směru pohybu družice. Vektor poruchového zrychlení  $\vec{F}$  působícího na družici lze spočítat podle vztahu

$$\vec{F} = -\frac{1}{2} C_D \frac{A}{m} \rho V^2 \mathbf{v} \quad (3.7)$$

V tomto vzorci je  $C_D$  koeficient odporu,  $A$  efektivní průřez (průřez družice kolmý na směr pohybu),  $m$  hmotnost družice,  $\rho$  hustota atmosféry. Výraz  $V^2 \mathbf{v}$  vyjadřuje rozdíl mezi orbitální rychlostí a rychlostí rotace atmosféry a nazývá se vektor aerodynamické rychlosti družice,  $V$  je velikost tohoto vektoru a  $\mathbf{v}$  je jednotkový vektor. Hustota atmosféry závisí na výšce družice nad povrchem Země, což vyjadřuje vztah

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\eta - \eta_0}{H}} \quad (3.8),$$

kde  $\rho_0$  je známá hustota atmosféry vztažená k výšce  $\eta_0$  nad zemským povrchem,  $\eta$  je výška družice a  $H$  hustotní škála výšek.

Ze vztahu (3.7) je nutné vyjádřit součin koeficientů  $C_D A$ . Pro zjednodušení lze sice považovat tuto hodnotu za časově neměnnou, ale pro vyšší přesnost prováděných výpočtů je nutné využívat modelů, které popisují změny této hodnoty, např. počítáním úhlu dopadu molekul vzduchu.

Mezi vlivy atmosféry řadíme ještě vliv atmosférického vztlaku. Pro tento jev platí vztah analogický ke vztahu pro výpočet poruchového zrychlení způsobeném odporem atmosféry (3.7), tedy

$$F = \frac{1}{2} C_L \frac{A}{m} \rho V^2 \mathbf{v} \quad (3.9)$$

V tomto případě představuje výraz  $V^2v$  vektor vztlaku a koeficient  $C_L$  zde má podobný význam jako  $C_D$  ve vztahu (3.7). U kulových družic je hodnota vztlaku nulová.

Vliv atmosféry způsobuje krátkoperiodické poruchy u všech keplerovských dráhových elementů, nejvýznamnější pak na velikost hlavní poloosy a na hodnotu excentricity. Tyto dva elementy se působením atmosféry zmenšují, což znamená přibližování se dráhy družice od eliptického tvaru ke kružnici a její klesání.

Jak je vidět ze vztahu (3.8), hustota atmosféry klesá exponenciálně se vzrůstající výškou, čímž přirozeně klesá také příslušné poruchové zrychlení, takže pro družice na vysokých drahách nad Zemí můžeme tuto poruchu zcela zanedbat.

### 3.2.2 Vliv slunečního záření a funkce stínu

Vliv slunečního záření lze rozdělit do dvou skupin. První je tlak samotného proudu fotonů na těleso družice, které se pohybuje mimo stín Země, druhou pak záření (včetně tepelného infračerveného) odražené od Zemského povrchu (podrobněji v dalším odstavci).

První z faktorů určujících celkový vliv slunečního záření na dráhu družice je tzv. sluneční konstanta:

$$E_0 = \sigma T^4 \left( \frac{R_s}{D_s} \right)^2 \quad (3.10)$$

V tomto vztahu  $\sigma$  představuje Stefan-Boltzmannovu konstantu,  $T$  teplotu v kelvinech,  $R_s$  poloměr Slunce a  $D_s$  vzdálenost Slunce-Země.

Dále záleží účinek slunečního záření na vlastnostech povrchu částí družice, na kterou paprsky dopadají. Účinek lze v tomto případě rozdělit do tří složek:

- absorpce - energie je povrchem družice absorbována
- propustnost - pro část záření, kterou plocha družice propustí; dělíme ji dále na zrcadlovou a difúzní. Při zrcadlové propustnosti prochází paprsek beze změny směru, při difúzní se řídí kosinovým zákonem.
- odraz – pro paprsky, které se odráží od povrchu družice; opět dělíme na zrcadlový (odráží se do jednoho směru) a difúzní (rozptýlí se rovnoměrně do všech směrů)

Tyto tři vlivy jsou definovány relativními koeficienty  $\alpha$  (absorpce),  $\tau$  (propustnost),  $\rho$  (odraz). Dolní indexy  $s$ , resp.  $d$  představují složky zrcadlové, resp. difúzní. Pro tyto koeficienty platí:

$$\alpha + (\tau_s + \tau_d) + (\rho_s + \rho_d) = 1 \quad (3.11)$$

Pokud neuvažujeme vliv několikanásobných odrazů, můžeme pro vektor elementární síly psát:

$$d\vec{F} = \frac{E_i}{c} \left[ (1 - \tau_s - \rho_s) \vec{d}_i - 2 \left( \rho_s \cos \Theta + \frac{\rho_d - \tau_d}{3} \right) \vec{n} \right] \quad (3.12),$$

kde  $c$  je rychlost světla,  $\vec{d}_i$  jednotkový vektor ležící ve směru dopadu částice,  $\Theta$  je úhel mezi vektorem normály k ploše dopadu částice a směrem dopadu částice,  $\vec{n}$  jednotkový vektor normály a energie  $E_i$  nesená fotonem je dána výrazem

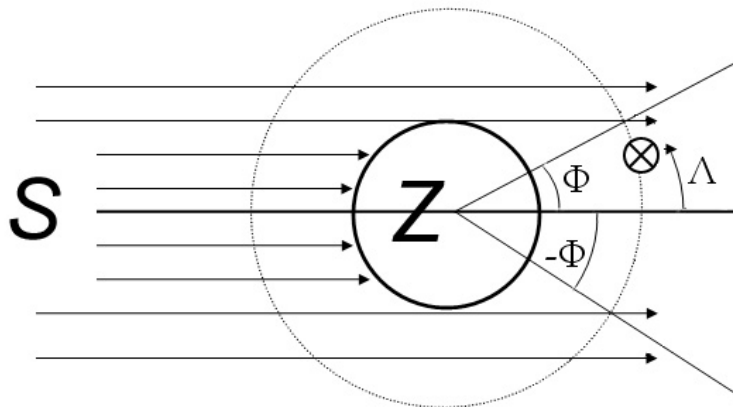
$$E_i = \frac{S_e \cos \Theta_e}{N_e} E_0 \quad (3.13),$$

ve kterém je  $S_e$  obsah plochy, ze které je foton vyjádřen,  $\Theta_e$  je úhel mezi její normálou a směrem ke Slunci a  $N_e$  počet vyjádřených částic. Výslednou hodnotu  $F$  působící na družici dostaneme sumací elementárních sil přes všechny plochy dopadu a všechny elementární částice.

Je zřejmé, že výše uvedené úvahy se týkají pouze družice, která se nachází mimo zemský stín. Proto se zavádí tzv. stínová funkce  $\Psi$ , kterou se násobí vztah (3.12). Tato je dána předpisem:

$$\Psi = \begin{cases} 0, & -\Phi < \Lambda < \Phi \\ 1, & -\pi < \Lambda < -\Phi, \Phi < \Lambda < \pi \end{cases} \quad (3.14)$$

Význam úhlů  $\Phi, \Lambda$  je patrný z obr. (3.2):



Obr. 3.2: Funkce stínu

Při analytickém řešení úlohy vlivu slunečního záření je výhodné nahradit stínovou funkcí nějakým analytickým výrazem, např. mocninnou nebo Fourierovou řadou. Pro numerické řešení je ovšem lepší testovat pro každý krok integrace vzájemnou polohu Slunce, Země a družice a podle toho určit hodnotu  $\Psi$ . Pro přesnější výpočty je nutné ještě zahrnout vliv polostínu. V tomto případě nabývá funkce  $\Psi$  hodnoty

$$0 < \Psi < 1 \quad (3.15)$$

### 3.2.2.1 Vliv radiace

Z celkového množství slunečního záření dopadnuvšího na Zemi se zhruba 10% odrazí (tzv. albedo) a asi 40% se přemění na tepelné (infračervené záření).

Pro výpočet síly  $dF$  použijeme vzorec (3.12), kde za  $E_i$  dosazujeme:

$$E_i = \frac{S_e \cos \Theta_e \cdot \varphi_m}{N_e} \quad (3.16)$$

kde  $\varphi_m$  je součet toku tepelného, resp. odraženého záření.

### 3.3 Přehled druhů poruch

Na závěr uvádím tabulku s přehledem základních typů poruchových vlivů a jejich relativní velikost.

druh síly	příčina poruch		relativní účinek
konzervativní	tíhové pole Země	zploštění	1
		anomální tíhové pole Země	$10^{-3}$
	gravitace Měsíce		$10^{-5}$
	gravitace Slunce		$10^{-6}$
	slapy		$10^{-7} \div 10^{-8}$
	relativistické efekty		-
nekonzervativní	atmosféra		$10^{-6} \div 10^{-7}$
	záření	přímé sluneční	$10^{-6} \div 10^{-7}$
		radiace	$10^{-7} \div 10^{-8}$
příčina v družici	záření družice		-
	odpor částic		-

Tab. 3.1: Přehled druhů poruchpůsobících na družici

## 4. Základní poznatky vyrovnávacího počtu

V této kapitole bude teoreticky popsán způsob určení nejpravděpodobnějších hodnot dráhových elementů  $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ , jsou-li pro časový interval  $T_0 - T_k$  známy vypočtené dráhové elementy a přímo měřené souřadnice. V prvním odstavci bude popsána metoda nejmenších čtverců, dále pak bude objasněn princip vyrovnání zprostředkujících měření a jeho konkrétní aplikace pro výše uvedený případ.

### 4.1 Metoda nejmenších čtverců

Před samotným popisem metody uvedeme nejprve základní vztah:

$$\bar{l}_i = l_i + v_i \quad (4.1)$$

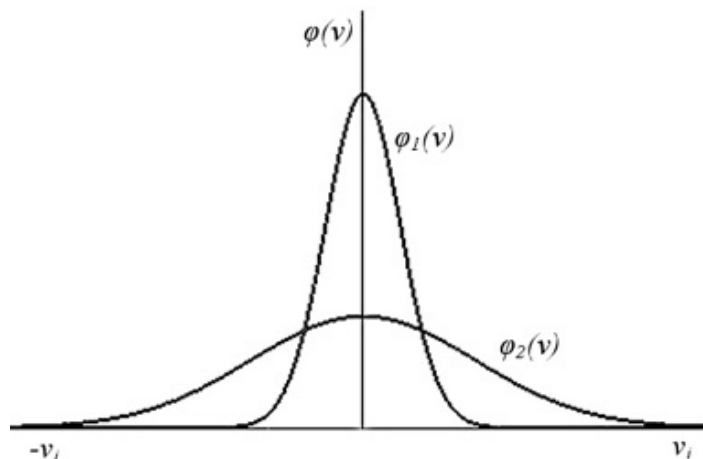
Zde je  $\bar{l}_i$  naměřená hodnota,  $l_i$  opravená hodnota a  $v_i$  náhodná oprava. Index  $i = 1 \dots n$ , kde  $n$  označuje počet měření. Základním pilířem metody nejmenších čtverců (dále jen MNČ) je Gaussův zákon, který popisuje rozložení náhodných veličin (v našem případě náhodné opravy  $v_i$ ). Podle něj splňují náhodné veličiny tyto vlastnosti:

- velikost kladné a záporné opravy téže absolutní velikosti je stejně pravděpodobná
- malé opravy jsou pravděpodobnější než opravy velké

Matematický zápis Gaussova zákona je

$$\varphi(v) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{(-h^2 v^2)} \quad (4.2)$$

Průběh funkce vyjadřuje tzv. Gaussova křivka četnosti (obr. 4.1). Její strmost závisí na parametru  $h$  (v uvedeném případě je  $h_1 > h_2$ ).



Obr. 4.1: Gaussova křivka četnosti

Pravděpodobnost, že se oprava  $v_i$  objeví v intervalu  $(v, v + dv)$  je

$$p(v) = \varphi(v)dv \quad (4.3)$$

Pravděpodobnost, že oprava  $v_i$  bude z intervalu  $(-\infty, \infty)$  je 1.

Kromě náhodných oprav  $v_i$  se v souboru měření mohou vyskytovat ještě chyby systematické (pro celou oblast měření) a polosystematické (pro určitou část oblasti měření), se kterými pracuje rozšíření MNČ, tzv. metoda kolokace. Dále pak to mohou být chyby hrubé, se kterými MNČ nepracuje a je třeba je z vyrovnání předem vyloučit.

Podmínku minimalizace druhých mocnin  $v_i$  od nejpravděpodobnějších hodnot měřené veličiny  $l_i$  zapíšeme ve tvaru:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \min \quad (4.4)$$

kde

$$\mathbf{v} = (v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n) \quad (4.5)$$

je vektor náhodných oprav a

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & p_2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

matice vah. Volbou členů  $p_i$  je možné charakterizovat kvalitu jednotlivých měření. Mají-li všechna měření kvalitu stejnou, je tato matice jednotková.

Metody vyrovnání pomocí MNČ dělíme na:

- vyrovnání měření přímých – pro opakované měření téže veličiny
- vyrovnání měření zprostředkujících – neznámé veličiny nejsou měřeny přímo, místo nich jsou měřeny veličiny jiné, které jsou s hledanými ve známém funkčním vztahu; o vyrovnání zprostředkujících měření bude podrobněji pojednáno v kapitole 4.2
- vyrovnání měření podmínkových – naměřené veličiny musí splňovat určité předem dané podmínky
- vyrovnání kombinovaná – kombinuje některé z výše uvedených metod vyrovnání

## 4.2 Vyrovnání zprostředkujících měření

Vyrovnání zprostředkujících měření je v dnešní době zdaleka nejpopulárnější vyrovnávací metodou a to především proto, že je nejsnadněji zpracovatelné pomocí výpočetní techniky. Často se na ně převádějí i jiné metody vyrovnání. Jak už bylo uvedeno výše, u zprostředkujících pozorování nejsou k dispozici přímo naměřené hodnoty neznámé veličiny,

ale pouze jiné – zprostředkující – hodnoty, které jsou s hledanými ve známém funkčním vztahu. Označme nejprve vektor neznámých hledaných hodnot  $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_k)$ , pro nějž platí

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + d\mathbf{x} \quad (4.7)$$

kde  $\mathbf{x}_0 = (x_{01} \ x_{02} \ \dots \ x_{0k})$  označuje známý vektor přibližných hodnot a  $d\mathbf{x} = (dx_1 \ dx_2 \ \dots \ dx_k)$  je vektor jejich vyrovnaných neznámých přírůstků. Dále platí vztah (4.1) pro naměřené veličiny. Označíme-li

$$F_i(\mathbf{x}) = \bar{l}_i \quad (4.8)$$

pak z (4.1) a (4.7) zřejmě platí:

$$F_i(x_{10} + dx_1 \ \dots \ x_{k0} + dx_k) = l_i + v_i \quad (4.9)$$

Pro další výpočty je nutné funkci  $F_i$  linearizovat. To provedeme nejlépe použitím Taylorova rozvoje a dostaneme:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F_i}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial F_i}{\partial x_k} dx_k + F_i(\mathbf{x}_0) - l_i = v_i \quad (4.10)$$

kde  $L_i = F_i(\mathbf{x}_0) - l_i$  je tzv. absolutní člen. Pro lepší přehlednost nahradíme výrazy parciálních derivací proměnnou  $a_{ij}$  a můžeme sestavit soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} a_{11}dx_1 + a_{12}dx_2 + \dots + a_{1k}dx_k + l_1 &= v_1 \\ a_{21}dx_1 + a_{22}dx_2 + \dots + a_{2k}dx_k + l_2 &= v_2 \\ \dots & \\ a_{n1}dx_1 + a_{n2}dx_2 + \dots + a_{nk}dx_k + l_n &= v_n \end{aligned} \quad (4.11)$$

kde  $n$  je počet zprostředkujících rovnic a  $k$  je počet hledaných neznámých. Tuto soustavu můžeme zapsat také v maticovém tvaru:

$$\mathbf{A}d\mathbf{x} + \mathbf{L} = \mathbf{v} \quad (4.12)$$

Nyní tuto rovnici dosadíme do vztahu (4.4). V našem případě budeme považovat matici vah  $\mathbf{P}$  za jednotkovou a zapíšeme opět v maticovém tvaru:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}d\mathbf{x} + \mathbf{L})^T (\mathbf{A}d\mathbf{x} + \mathbf{L}) &= \min \\ (d\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T + \mathbf{L}^T) (\mathbf{A}d\mathbf{x} + \mathbf{L}) &= \min \\ d\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}d\mathbf{x} + \mathbf{L}^T \mathbf{A}d\mathbf{x} + d\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \mathbf{L} &= \min \end{aligned} \quad (4.13)$$

Pro získání minima zderivujeme tento výraz podle  $\mathbf{x}^T$  a položíme roven nule.

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A}d\mathbf{x} + \mathbf{A}^T \mathbf{L} = \mathbf{0} \quad (4.14)$$

Nyní provedeme substituci  $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$  a vyjádříme vektor neznámých oprav jako:

$$d\mathbf{x} = -\mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{L} \quad (4.15)$$

V dalším kroku dosadíme do rovnice (4.12) a dostaneme vektor náhodných oprav  $\mathbf{v}$ . Ten dosadíme do následujícího vztahu pro výpočet střední jednotkové chyby:

$$m_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}{n - k}} \quad (4.16)$$

Výraz  $n-k$  je počet nadbytečných měření. Na závěr vypočteme střední chybu jednotlivých neznámých  $dx$  podle vztahu:

$$m_{x_i} = m_0 \sqrt{q_{ii}} \quad (4.17)$$

kde  $q_{ii}$  jsou diagonální prvky matice váhových součinitelů  $\mathbf{Q}_{xx}$ , pro kterou platí:

$$\mathbf{Q}_{xx} = \mathbf{N}^{-1} \quad (4.18)$$



## 5. Praktické aplikace výpočetních programů

### 5.1 Numerická integrace

Dráha družice je počítána programem `integr`, který využívá Runge-Kuttovu metodu numerické integrace. Tato metoda je podrobněji popsána v kap. (2.2). V této kapitole se budu zabývat testováním této metody na konkrétních datech, včetně porovnání s výsledky jiných autorů.

Kontrola přesnosti Runge-Kuttovy metody je testována tak, že se porovnávají souřadnice družice v čase  $t$  se souřadnicemi po uplynutí jedné otočky ( $t+T$ ). Při nerušeném pohybu by měly být tyto souřadnice shodné a skutečný rozdíl mezi nimi můžeme považovat za chybu metody. Při tomto postupu je délka kroku numerické integrace jako zlomek z času jedné otočky. Tento čas musí být zadán za dráhovými elementy ve vstupním souboru na sedmém řádku.<sup>1</sup>

První případ se bude týkat družice typu GPS s těmito vstupními hodnotami:

x [m]	-23714970.048586730	$v_x$ [m/s]	-1055.134450644887
y [m]	-2113498.593241671	$v_y$ [m/s]	-2636.672130694196
z [m]	-11850913.221970740	$v_z$ [m/s]	2627.348031422829
T [h]	11.9667812337		

Tab 5.1 Dráhové elementy družice GPS

Odchylka polohy v jednotlivých souřadnicích a celková vyšla:

krok	h [s]	$\Delta x$ [m]	$\Delta y$ [m]	$\Delta z$ [m]	$\Delta r$ [m]
$T/100$	430.80	-1.89E+01	-5.53E+01	5.71E+01	8.18E+01
$T/1000$	43.08	-1.72E-03	-4.23E-03	4.19E-03	6.20E-03
$T/5000$	8.62	-2.75E-06	-6.55E-06	6.42E-06	5.39E-07
$T/10000$	4.31	-1.88E-07	-3.79E-07	-3.33E-07	5.52E-08
$T/20000$	2.15	-2.84E-08	5.43E-09	-4.70E-08	7.26E-08
$T/30000$	1.44	-1.98E-08	2.44E-08	-6.54E-08	7.84E-08
$T/40000$	1.07	-1.81E-08	2.93E-08	-7.05E-08	7.95E-08
$T/100000$	0.43	-1.75E-08	3.03E-08	-7.13E-08	7.68E-08
$T/300000$	0.14	-1.97E-08	2.23E-08	-6.30E-08	6.98E-08
$T/600000$	0.07	-1.72E-08	3.11E-08	-7.28E-08	8.11E-08

Tab 5.2: Výsledky numerické integrace

<sup>1</sup> Délka kroku vypočtená z tohoto údaje se dále používá po dobu celého výpočtu, i když zadaná délka otočky se vztahuje pouze k příslušným dráhovým elementům a dále se s časem mění.

V tabulce jsou kurzívou zvýrazněna data, která bylo možno porovnávat s výsledky Tomáše Peška uveřejněnými v jeho diplomové práci [8]. Tomáš Pešek použil ve své práci stejnou (tedy Runge-Kuttovu) metodu numerické integrace, a to v prostředí programu MATLAB. Zde uvádím jím vypočtené hodnoty:

krok	h [s]	$\Delta x$ [m]	$\Delta y$ [m]	$\Delta z$ [m]	$\Delta r$ [m]
<i>T/100</i>	430.80	-1.90E+01	-5.54E+01	5.72E+01	8.18E+01
<i>T/1000</i>	43.08	-1.73E-03	-4.23E-03	4.19E-03	6.20E-03
<i>T/10000</i>	4.31	-3.17E-07	-1.67E-06	1.62E-06	2.35E-06
<i>T/20000</i>	2.15	5.59E-08	-6.24E-07	8.62E-07	1.07E-06
<i>T/30000</i>	1.44	-3.73E-07	-1.94E-07	3.19E-07	5.27E-07
<i>T/40000</i>	1.08	-2.68E-07	-1.40E-06	1.79E-06	2.24E-06

*Tab. 5.3: Výsledky numerické integrace převzaté z [8]*

Dále uvedu ještě řešení téhož příkladu programem HU1PO223.bas poskytnutým prof. Kabeláčem vytvořeným v prostředí Q-Basic. Používá algoritmicky dosti složitou Everhartovu metodu numerické integrace, která nepracuje s postupným výpočtem podle nastavené délky kroku, jako je tomu např. u metody Runge-Kuttovy. Není úkolem této práce podrobně popisovat její principy, proto uvedu pouze fakt, že přesnost této metody závisí především na nastavení proměnných OPA – počtu opakování vnitřního aproximačního cyklu a CAST, což je délka kroku v jednotkách keplerovské otočky. Hodnota OPA je v našem případě rovna 9 a nemění se, snižování hodnoty proměnné CAST je uvedeno v tabulce:

CAST	$\Delta x$ [m]	$\Delta y$ [m]	$\Delta z$ [m]	$\Delta r$ [m]
0.5	1.76E-01	1.14E+00	-1.31E+00	1.74E+00
0.25	9.50E-06	5.27E-05	-5.96E-05	8.01E-05
0.125	2.00E-08	1.40E-07	-1.50E-07	2.06E-07
0.1	0.00E+00	-1.02E-07	1.20E-07	1.57E-07
0.01	-4.00E-08	-6.30E-08	3.00E-08	8.04E-08

*Tab.5.4: Výsledky numerické integrace programem prof. Kabeláče*

Volbu délky kroku jsem ve svém případě (tab. 5.2) volil tak, aby je bylo možné konfrontovat s výsledky Tomáše Peška (tab. 5.3, převzato z [8]). Toto porovnání ukazuje, že moje verze výpočetního programu dosahuje při vhodné volbě délky kroku zhruba o jeden řád lepší přesnosti, což je však zřejmě jen důsledek volby programovacího jazyka. Nutno také počítat s faktem, že pro skutečně signifikantní srovnání by bylo nutno aplikovat programy na více konkrétních příkladech. Porovnání s programem prof. Kabeláče (tab. 5.4) nemůže podobné porovnání poskytnout kvůli principiálně značně odlišné metodě numerické integrace. Tato data zde uvádím spíše pro ukázkou přesnosti dosažitelné touto metodou.

Pro další ukázkou jsem provedl výpočet souřadnic ještě u dalších družic GPS (tab. 5.5, 5.6) a MIMOSA (tab. 5.7, 5.8).

GPS			
x [m]	-14889085	$v_x$ [m/s]	496,538
y [m]	-3660180	$v_y$ [m/s]	-3810,433
z [m]	21848509	$v_z$ [m/s]	-305,561
T [h]	11,9656926014303		

Tab.5.5: Dráhové elementy družice GPS

krok	h [s]	$\Delta x$ [m]	$\Delta y$ [m]	$\Delta z$ [m]	$\Delta r$ [m]
T/100	430,76	1.303E+01	-8.007E+01	-1.016E+01	8.176E+01
T/1000	43,08	8.156E-04	-6.137E-03	-5.150E-04	6.216E-03
T/3000	14,36	4.815E-06	-3.715E-05	-2.941E-06	3.758E-05
T/5000	8,62	-3.628E-06	2.777E-05	2.240E-06	2.810E-05
T/10000	4,31	-4.794E-06	3.679E-05	2.951E-06	3.721E-05
T/30000	1,44	-4.871E-06	3.738E-05	2.998E-06	3.781E-05
T/80000	0,54	-4.871E-06	3.738E-05	2.998E-06	3.782E-05

Tab. 5.6: Výsledky NI pro družici GPS

MIMOSA			
x [m]	-2536059	$v_x$ [m/s]	3373,512
y [m]	-2497194	$v_y$ [m/s]	5777,853
z [m]	-5678582	$v_z$ [m/s]	-4101,841
T [h]	1,601225014		

Tab.5.7: Dráhové elementy družice MIMOSA

krok	h [s]	$\Delta x$ [m]	$\Delta y$ [m]	$\Delta z$ [m]	$\Delta r$ [m]
T/100	57.64	9.328E+00	1.565E+01	-9.778E+00	2.067E+01
T/500	11.53	1.113E-02	1.887E-02	-1.262E-02	2.528E-02
T/1000	5.76	5.432E-04	9.209E-04	-6.161E-04	1.234E-02
T/2000	2.88	-9.064E-05	-1.558E-04	1.126E-04	2.125E-04
T/5000	1.15	-1.294E-04	-2.216E-04	1.575E-04	3.011E-04
T/10000	0.58	-1.319E-04	-2.259E-04	1.604E-04	3.068E-04
T/50000	0.12	-1.319E-04	-2.260E-04	1.604E-04	3.070E-04

Tab. 5.8: Výsledky NI pro družici MIMOSA

Po shlédnutí výše uvedených tabulek můžeme konstatovat, že snižováním délky kroku numerické integrace se odchylka souřadnic snižuje, ovšem pouze do jisté meze, od které se tato chyba udržuje na přibližně stejné hodnotě. Hranici, od které již nemá smysl snižovat délku kroku, lze předem těžko odhadnout. Je rozdílná nejen u různých družic, ale nejspíše také u stejné družice pro různé dráhové elementy (pro různé časy  $t_0$ ). Tuto domněnku potvrzuje porovnání dvou družic typu GPS (Tab. 5.2 a 5.6), které mají velice podobné dráhy letu, a přesto je u nich ona zlomová hodnota délky kroku  $h$  značně rozdílná. Pro její správné určení bych doporučil provést test popsany v úvodu tohoto odstavce před každým výpočtem.

V případě pochybností je sice možné volit délku kroku „co nejmenší“, ale to bude vždy již na úkor výpočetní doby, která může být při započtení poruch značná.

Dále vidíme, že největší chyba v poloze družice byla zaznamenána u družice MIMOSA (tab. 5.8). Tato chyba je sice několikanásobně větší než u mimořádně příznivých výsledků první z družic GPS (tab. 5.2), je však dobré si uvědomit, že se stále pohybuje v řádu desetin milimetrů. A to je odchylka naprosto přijatelná, obzvláště pokud uvážíme, že očekávané odchylky při počítání jednotlivých poruch budou patrně o řád vyšší.

## 5.2 Vliv gravitačního pole Země

Připomeňme, že doposud byly prováděny všechny výpočty souřadnic družice v pravoúhlé souřadnicové soustavě vztažené k jarnímu bodu, tedy nezávislé na čase. Výpočet poruchového zrychlení od gravitačního pole Země však bezprostředně souvisí s polohou družice vůči Zemi a je tedy nutné jej provádět v soustavě terestrické. V proceduře `VlivZeme`, která je součástí mého programu a počítá právě poruchové zrychlení od Země, jsou tak vstupními parametry nejen pravoúhlé souřadnice vztažené k jarnímu bodu, ale také čas.

Prvním krokem procedury `VlivZeme` je převedení souřadnic vztažených k jarnímu bodu do terestrické soustavy. To se provede otočením soustavy o úhel  $EE$ , který představuje greenwichský světový čas, podle vzorců

$$\begin{aligned} XT &= X \cos(EE) + Y \sin(EE) + XP \frac{\pi}{648000} \\ YT &= -X \sin EE + Y \cos EE - YP \frac{\pi}{648000} \\ ZX &= [X(-XP \cos(EE) - YP \sin(EE)) + Y(-XP \sin(EE) + YP \cos(EE))] \frac{\pi}{648000} + Z \end{aligned} \quad (5.1)$$

V programu jsem zanedbal pohyb pólů, souřadnice jejich okamžité polohy  $XP$ ,  $YP$  jsem položil rovny nule.

Dalším krokem je převedení pravoúhlých souřadnic na souřadnice geocentrické  $\varphi, \lambda, r$ .

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{XT^2 + YT^2 + ZT^2} \\ \varphi &= \arcsin\left(\frac{ZT}{r}\right) \\ \lambda &= \arcsin\left(\frac{YT}{\sqrt{XC^2 + YC^2}}\right) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Následuje výpočet Legendrových polynomů a Legendrových přidružených funkcí. Vzorce pro jejich výpočet jsou zmíněny v kapitole 3.1.1 (vztahy 3.3 a 3.4). V uvedeném tvaru však nejsou vhodné pro počítačové zpracování. Proto použijeme rekurentních vztahů ve tvaru:

$$\begin{aligned} P_i^i(t) &= P_{i-1}^{i-1}(t)\sqrt{1-t^2}(2i-1) \\ P_i^{i-1}(t) &= P_{i-1}^{i-1}(t)t(2i-1) \\ P_i^k(t) &= \left[ P_{i-1}^k(t)t(2i-1) - P_{i-2}^k(t)(i+k-1) \right] \frac{1}{i-k} \end{aligned} \quad (5.3)$$

V našem případě po dosazení parametru  $t = \sin \varphi$  (označme  $P_i^k(\sin \varphi) = P_i^k$ ):

$$\begin{aligned} (a) \quad P_i^i &= P_{i-1}^{i-1} \cos \varphi (2i-1) \\ (b) \quad P_i^{i-1} &= P_{i-1}^{i-1} \sin \varphi (2i-1) \\ (c) \quad P_i^k &= \left[ P_{i-1}^k \sin \varphi (2i-1) - P_{i-2}^k (i+k-1) \right] \frac{1}{i-k} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Na začátku výpočtu Legendrových polynomů a přidružených funkcí zvolíme hodnotu  $P_1^1 = 1$  a dále pokračujeme podle výše popsaného algoritmu (5.4) a to tak, že nejprve počítáme po jednotlivých krocích rovnice (a) a (b) a až posléze na základě jejich znalosti dosazujeme do rovnice (c).

Podobným způsobem bude probíhat také výpočet derivací Legendrových polynomů a přidružených funkcí, které budeme dosazovat později do (5.8). Pro tyto platí rovněž rekurentní vztahy, po dosazení za parametr  $t = \sin \varphi$ :

$$\begin{aligned} (a) \quad P_i'^i &= P_{i-1}'^{i-1} i (2i-1) \cos \varphi \frac{1}{i-1} \\ (b) \quad P_i'^{i-1} &= P_{i-1}'^{i-1} (2i-1) \left( i \sin \varphi - \frac{1}{\sin \varphi} \right) \frac{1}{i-1} \\ (c) \quad P_i'^k &= \left[ P_i^k i \sin \varphi - P_{i-1}^k (i+k) \right] \frac{-1}{\cos^2 \varphi} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Tento vzorec platí pro  $i > 1$ , musíme tedy určit, resp. ručně vypočítat hodnoty

$$\begin{aligned} P_0'^0 &= 0 \\ P_1'^0 &= 1 \\ P_1'^1 &= -\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Nyní je třeba spočítat derivace poruchového potenciálu, které představují poruchové zrychlení. Protože se pohybujeme v pravoúhlé souřadnicové soustavě a vzorec (xxx  $R=...$ ) je závislý na geocentrických souřadnicích  $\varphi, \lambda, r$ , budeme postupovat podle vztahů:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} \\ F_y &= \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial y} \\ F_z &= \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial z} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Vzorce pro výpočet derivací poruchového potenciálu získáme derivací vztahu (3.2) podle složek  $\varphi, \lambda, r$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \varphi} &= -\frac{\mu}{r} \sum_{l=2}^{\infty} \left( \frac{a_{\oplus}}{r} \right)^l \sum_{m=0}^l (C_l^m \cos m\lambda + S_l^m \sin m\lambda) \frac{d(P_l^m)}{d\varphi} \\ \frac{\partial R}{\partial \lambda} &= -\frac{\mu}{r} \sum_{l=2}^{\infty} \left( \frac{a_{\oplus}}{r} \right)^l \sum_{m=0}^l m (-C_l^m \sin m\lambda + S_l^m \cos m\lambda) P_l^m \\ \frac{\partial R}{\partial r} &= -\frac{\mu}{r^2} \sum_{l=2}^{\infty} (l+1) \left( \frac{a_{\oplus}}{r} \right)^l \sum_{m=0}^l (C_l^m \cos m\lambda + S_l^m \sin m\lambda) P_l^m \end{aligned} \quad (5.8)$$

V tomto vztahu vystupují členy  $C_l^m, S_l^m$ , což jsou – jak již bylo zmíněno v kapitole (3.1.1) – Stokesovy koeficienty. Ty popisují model tíhového pole Země WGS84-EGM96 (World Geodetic System 1984 – Earth Gravitational Model 1996) a jsou uloženy v textovém souboru `nen_egm.txt` až do stupně a řádu 150. Tento soubor načítám podle zadaného stupně a řádu na samém začátku programu, tedy dříve, než započne cyklus numerické integrace včetně počítání poruchových vlivů.

Z (5.2) lze dále odvodit vztahy pro výpočet zbývajících členů v rovnicích (5.7), tedy derivace geocentrických souřadnic  $\varphi, \lambda, r$  podle souřadnic pravoúhlých vztažených ke Greenwichi  $x, y, z$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{\sin \varphi \cos \lambda}{r} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -\frac{\sin \varphi \cos \lambda}{r} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= -\frac{\cos \varphi}{r} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x} &= -\frac{\sin \lambda}{r \cos \varphi} & \frac{\partial \lambda}{\partial y} &= -\frac{\cos \lambda}{r \cos \varphi} & \frac{\partial \lambda}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial r}{\partial x} &= \cos \varphi \cos \lambda & \frac{\partial r}{\partial y} &= \cos \varphi \cos \lambda & \frac{\partial r}{\partial z} &= \sin \varphi \end{aligned} \quad (5.9)$$

Výsledné poruchové zrychlení získáme jednoduchým dosazením rovnic (5.8) a (5.9) do vztahu (5.7). Protože se po celou dobu výpočtů nacházíme v souřadnicové soustavě vztažené

ke Greenwichi ( $F^T$ ), musíme ještě na závěr tyto souřadnice převést do soustavy vztažené k jarnímu bodu ( $F$ ). To se provede zpětným otočením soustavy kolem osy z. Stejně jako u inverzního vztahu (5.1) uvádím vzorce v jejich plném znění včetně započtení aktuálních souřadnic pólů, i když v programu je stavím rovny nule.

$$\begin{aligned}
 F_x &= F_x^T \cos(E E) - F_y^T \sin(E E) + (-X P \cos(E E) - Y P \sin(E E)) F_z^T \frac{\pi}{648000} \\
 F_y &= F_x^T \sin(E E) - F_y^T \cos(E E) + (-X P \cos(E E) + Y P \sin(E E)) F_z^T \frac{\pi}{648000} \\
 F_z &= (X P \cdot F_x^T - Y P \cdot F_y^T) \frac{\pi}{648000} + F_z^T
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

### 5.2.1 Výpočty vlivu gravitačního pole Země

Konkrétní data na testování programu jsem našel v diplomové práci Tomáše Peška [8]. Ten vybral na testování družici GPS s počátečními elementy uvedené v tabulce (5.9). Ty platí pro juliánské datum 2452133.5 (12.VIII. 2001, 0h) a počáteční čas 0h.

x [m]	-14889085.000000	v <sub>x</sub> [m/s]	496.538000
y [m]	-3660180.000000	v <sub>y</sub> [m/s]	-3810.433000
z [m]	21848509.000000	v <sub>z</sub> [m/s]	-305.561000
T [h]	11.9656926014303		

Tab. 5.9: Dráhové elementy družice GPS

V následujících třech tabulkách jsou uvedeny postupně souřadnice  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  počítané po intervalu jedné hodiny po dobu necelé jedné otočky. Indexy  $p$ ,  $k$ ,  $s$  označují výsledné hodnoty vypočtené Tomášem Peškem, prof. Kabeláčem a mnou. Pro svoje výpočty jsem zvolil délku kroku numerické integrace 0.1s a stupeň a řád Stokusových koeficientů 10.

Čas [h]	x <sub>p</sub> [m]	x <sub>k</sub> [m]	x <sub>s</sub> [m]
1	-11203085.8915033	-11203085.8913095	-11203085.8914973
2	-4532051.9846900	-4532051.9904909	-4532051.9846608
3	3352382.7390726	3352382.7387042	3352382.7391374
4	10327877.2991838	10327877.2969752	10327877.2992875
5	14491498.6037268	14491498.6085295	14491498.6038753
6	14696481.8611271	14696481.8626307	14696481.8613409
7	10886567.8399077	10886567.8414943	10886567.8402159
8	4112146.8083616	4112146.8063299	4112146.8087695
9	-3776967.2958253	-3776967.2961799	-3776967.2953716
10	-10654850.3878629	-10654850.3876205	-10654850.3874779
11	-14692893.5440670	-14692893.5423662	-14692893.5438753

Tab. 5.10: Vliv Země na družici GPS, souřadnice  $x$

Čas [h]	$y_p$ [m]	$y_k$ [m]	$y_s$ [m]
1	-16277891,3852032	-16277891,3847967	-16277891,3852107
2	-24553844,4209742	-24553844,4088383	-24553844,4209971
3	-26240119,4403009	-26240119,4375440	-26240119,4403378
4	-20833261,6955597	-20833261,6934028	-20833261,6956185
5	-9759452,6331342	-9759452,6537233	-9759452,6332351
6	3978975,1197569	3978975,1199388	3978975,1196097
7	16631643,4381442	16631643,4369303	16631643,4380092
8	24760090,2109795	24760090,2317351	24760090,2109971
9	26193924,3993527	26193924,3970763	26193924,3996953
10	20595861,1172718	20595861,1159448	20595861,1180290
11	9503443,1128341	9503443,1002423	9503443,1139178

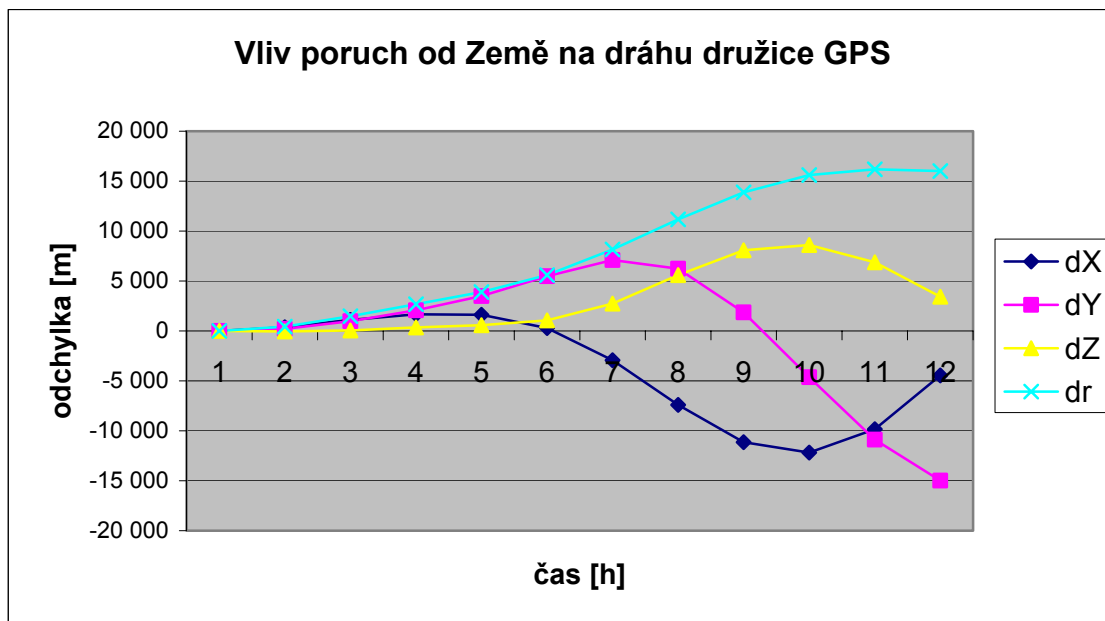
*Tab. 5.11: Vliv Země na družici GPS, souřadnice y*

Čas [h]	$z_p$ [m]	$z_k$ [m]	$z_s$ [m]
1	17894020,4842572	17894020,4837267	17894020,4842603
2	9170361,7362500	9170361,7425002	9170361,7362540
3	-2010679,6660420	-2010679,6660222	-2010679,6660390
4	-12644155,7074944	-12644155,7053761	-12644155,7074954
5	-19833940,7859342	-19833940,7925164	-19833940,7859637
6	-21604545,1976195	-21604545,1938358	-21604545,1977381
7	-17472096,8354913	-17472096,8326066	-17472096,8357780
8	-8581472,6388278	-8581472,6348361	-8581472,6393221
9	2633945,2180702	2633945,2178750	2633945,2174350
10	13146055,2990169	13146055,3005966	13146055,2984255
11	20154239,5612716	20154239,5646540	20154239,5609471

*Tab. 5.12: Vliv Země na družici GPS, souřadnice z*

V porovnání s programy prof. Kabeláče dochází u mých výsledků k odchylce řádově v milimetrech, maximálně v centimetrech, při konfrontaci s výsledky Tomáše Peška je shoda ještě zhruba o jeden řád příznivější. To je zřejmě dáno stejnou metodou numerické integrace. Na závěr tohoto odstavce ještě přikládám graf, který znázorňuje průběh odchylky (celkovou a v jednotlivých souřadnicích) od dráhy bez započtení vlivů Země.





Graf 5.1: Vliv poruch od Země na dráhu družice GPS

### 5.3 Gravitační vliv Měsíce a Slunce

Pro výpočty poruchového zrychlení je na patřičných místech programu volána procedura `VlivMesicSlunce`. V tomto případě jsem převzal algoritmy z programu prof. Kabeláče a pouze je přepsal do jazyka Delphi a zakomponoval v podobě zmíněné procedury do celého programu. Vstupními parametry pro výpočet poruchového potenciálu Měsíce a Slunce jsou přirozeně pravoúhlé souřadnice družice a dále čas a juliánské datum, které jsou potřebné pro zjištění aktuálních pravoúhlých souřadnic (efemerid) Slunce a Měsíce.

Pro Měsíc (resp. Slunce) jsou nejprve určeny ekliptikální souřadnice. Protože na rozdíl od poruchového zrychlení od Země nesouvisí vliv Země a Slunce s rotací Země, jsou tyto ekliptikální souřadnice převedeny pouze do soustavy vztažené k jarnímu bodu, ve které pak pokračují další výpočty.

Na rozdíl od Země můžeme považovat gravitační pole Měsíce a Slunce za homogenní, takže pro poruchové zrychlení můžeme použít jednodušší vzorce:

$$\begin{aligned}
 F_{Mx} &= \mu_M \left( \frac{X_M - X_\otimes}{\rho_M^3} - \frac{X_M}{r_M^3} \right) \\
 F_{My} &= \mu_M \left( \frac{Y_M - Y_\otimes}{\rho_M^3} - \frac{Y_M}{r_M^3} \right) \\
 F_{Mz} &= \mu_M \left( \frac{Z_M - Z_\otimes}{\rho_M^3} - \frac{Z_M}{r_M^3} \right)
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

kde

$$r_M = \sqrt{X_M^2 + Y_M^2 + Z_M^2} \quad (5.12)$$

$$\rho_M = \sqrt{(X_\otimes - X_M)^2 + (Y_\otimes - Y_M)^2 + (Z_\otimes - Z_M)^2}$$

$F_{Mx}, F_{My}, F_{Mz}$  jsou složky poruchového zrychlení,  $X_M, Y_M, Z_M$  souřadnice Měsíce a  $X_\otimes, Y_\otimes, Z_\otimes$  souřadnice družice, vše v geocentrické soustavě vztažené k jarnímu bodu. Dále  $r_M$  značí geocentrickou vzdálenost těžiště Měsíce a  $\rho_M$  vzdálenost těžišť družice a Měsíce. Pro Slunce jsou vztahy ekvivalentní. Celkový poruchové zrychlení dostaneme sečtením jednotlivých zrychlení od Slunce a Měsíce.

### 5.3.1 Výpočty vlivu gravitačního pole Měsíce a Slunce

Výsledky svých výpočtů budu opět porovnávat s daty, které jsem převzal z [diplomka peska]. Zde jsou uvedeny výsledky T. Peška a D. Šarmana pro družici GPS PRN 14 s dráhovými elementy

x [m]	14000339.1237373	$v_x$ [m/s]	1934.58826228331
y [m]	-22479786.3364301	$v_y$ [m/s]	1086.41947745536
z [m]	835378.163621631	$v_z$ [m/s]	-3187.07637781369
T [h]	11.9667195600921		

Tab. 5.13: Dráhové elementy družice GPS PRN 14

které se vztahují pro juliánské datum 2452133.5. Pešek sestavoval program v prostředí MATLABu a použil stejné algoritmy výpočtu jako já, Šarman použil zřejmě algoritmy jiné. Následující tabulky obsahují souřadnice družice pro prvních 10 hodin.

Čas [h]	$X_{pe}$ [m]	$X_{sa}$ [m]	$X_{sr}$ [m]
1	18747901.0051301	18747901.0063311	18747901.0051510
2	18414183.8052537	18414183.8036203	18414183.8052056
3	13101882.8126439	13101882.8029225	13101882.8127205
4	4258750.5805183	4258750.5615906	4258750.5811699
5	-5729085.1296359	-5729085.1664828	-5729085.1288286
6	-14183565.7713768	-14183565.8376891	-14183565.7713137
7	-18843365.4080653	-18843365.4876131	-18843365.4073614
8	-18456750.6822649	-18456750.7293885	-18456750.6762543
9	-13115134.5659416	-13115134.5531406	-13115134.5502916
10	-4241152.5906059	-4241152.5361804	-4241152.5657612

Tab. 5.16: Vliv Měsíce a Slunce na družici GPS PRN 14, souřadnice  $x$

Čas [h]	$Y_{pe}$ [m]	$Y_{sa}$ [m]	$Y_{sr}$ [m]
1	-15697778.0602540	-15697778.0481986	-15697778.0598804
2	-4660209.4557459	-4660209.4225382	-4660209.4550596
3	7639014.1694441	7639014.2056450	7639014.1692269
4	17882305.2946269	17882305.3078683	17882305.2926090
5	23326133.4298634	23326133.4100622	23326133.4265630
6	22523891.3029933	22523891.2436379	22523891.2985200
7	15695627.8313375	15695627.7160083	15695627.8236150
8	4664891.6549302	4664891.4879755	4664891.6422601
9	-7616540.2874822	-7616540.4565462	-7616540.3021575
10	-17843854.1655223	-17843854.2920581	-17843854.1749292

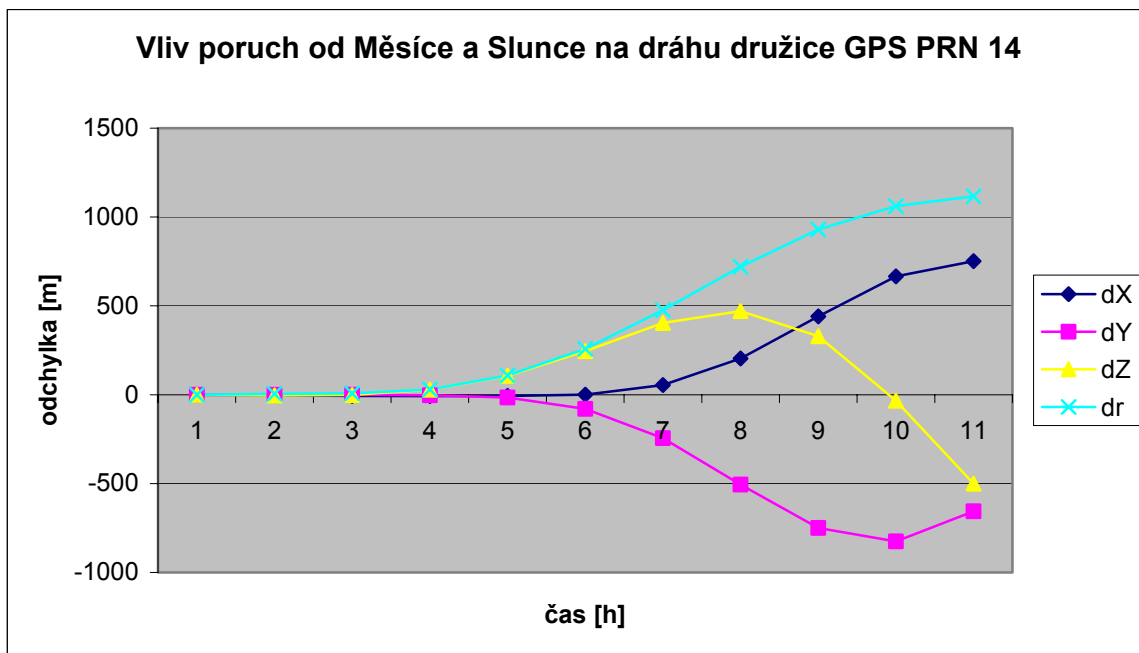
Tab. 5.17: Vliv Měsíce a Slunce na družici GPS PRN 14, souřadnice y

Čas [h]	$Z_{pe}$ [m]	$Z_{sa}$ [m]	$Z_{sr}$ [m]
1	-10227849.5065509	-10227849.5138849	-10227849.5070064
2	-18519759.0771579	-18519759.1006790	-18519759.0788889
3	-21805843.6147649	-21805843.6599213	-21805843.6187404
4	-19217550.2212334	-19217550.3002255	-19217550.2288301
5	-11469336.1870221	-11469336.3024117	-11469336.1984014
6	-649039.4848894	-649039.6054524	-649039.4972034
7	10344895.7834082	10344895.7033296	10344895.7740433
8	18567626.4558853	18567626.4377156	18567626.4500899
9	21804246.9211594	21804246.9725449	21804246.9155426
10	19166031.5742057	19166031.7303050	19166031.5652401

Tab. 5.18: Vliv Měsíce a Slunce na družici GPS PRN 14, souřadnice z

Moje výsledky jsou podle očekávání díky stejné použité metodě výpočtu velmi podobné výsledkům Tomáše Peška (odchylka řádově v milimetrech, max. centimetrech). Při porovnání s výsledky Šarmanovými vidíme odchylku nejvýše kolem jednoho decimetru.

Ještě uvádím graf naznačující velikost odchylky dráhy družice se započtenými vlivy Měsíce a Slunce od dráhy keplerovského pohybu.



Graf 5.2: Vliv poruch Měsíce a Slunce na dráhu družice GPS PRN 14

## 5.4 Určování dráhových elementů vyrovnáním zprostředkujících měření.

### 5.4.1 Sestavení linearizovaných rovnic oprav

Teoretické poznatky uvedené v kapitole (4.2) aplikujeme nyní na konkrétní příklad zpřesňování dráhových elementů družice MIMOSA. V tomto případě nám jako zprostředkující veličiny poslouží souřadnice  $x_{oi}, y_{oi}, z_{oi}$  pro libovolný čas  $T_i$  přímo měřené přístrojem GPS umístěným na palubě družice. Linearizované rovnice oprav pak budou:

$$\begin{aligned}
 \Delta x_i + x_{ci} - x_{oi} &= v_{xi} \\
 \Delta y_i + y_{ci} - y_{oi} &= v_{yi} \\
 \Delta z_i + z_{ci} - z_{oi} &= v_{zi}
 \end{aligned}
 \tag{5.13}$$

V těchto rovnicích jsou  $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$  totální diferenciály. Index  $c$  označuje hodnoty vypočtené a index  $o$  hodnoty přímo měřené. Jejich rozdíl je absolutním členem. Výrazy  $v$  na pravé straně jsou náhodné opravy.

## 5.4.2 Sestavení linearizovaných zprostředkujících rovnic

Nejprve uveďme základní vztah, na který se budeme později odvolávat. Jsou to rovnice, pomocí nichž vypočteme polohu družice pohybující se po dráze keplerovské elipsy v libovolném čase  $T_i$ . Vstupními hodnotami jsou zde dráhové elementy  $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$  vztažené k času  $T_0$ .

$$\begin{aligned}x_i &= F_i x_0 + G_i \dot{x}_0 \\y_i &= F_i y_0 + G_i \dot{y}_0 \\z_i &= F_i z_0 + G_i \dot{z}_0\end{aligned}\tag{5.14}$$

Funkce  $F_i, G_i$  jsou zde:

$$\begin{aligned}F_i &= 1 - \frac{2a}{r_0} \sin^2 \frac{1}{2}(E_i - E_0) \\G_i &= \frac{1}{n} [\sin(E_i - E_0) - E_i - E_0] + (T_i - T_0)\end{aligned}\tag{5.15}$$

kde jsou

$$\begin{aligned}r_0^2 &= x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 && \text{geocentrický průvodič} \\v_0^2 &= \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2 && \text{postupná rychlost} \\r_0 \dot{r}_0 &= x_0 \dot{x}_0 + y_0 \dot{y}_0 + z_0 \dot{z}_0 \\W &= 2\mu / r_0 - v_0^2 && \text{pomocná veličina,} \\a &= \mu / W && \text{hlavní poloosa} \\n &= W^{3/2} / \mu && \text{střední úhlový pohyb družice} \\e \cos E_0 &= 1 - r_0 / a && e \text{ výstřednost} \\e \sin E_0 &= r_0 \dot{r}_0 W^{1/2} / \mu && E_0 \text{ excentrická anomálie} \\E_i - E_0 &= n(T_i - T_0) + \sin(E_i - E_0) e \cos E_0 + [\cos(E_i - E_0) - 1] e \sin E_0\end{aligned}\tag{5.16}$$

### 5.4.2.1 Vytvoření totálních diferenciálů

Následující úvahy se budou týkat libovolného časového intervalu  $T_0 - T_i$ . Pro počáteční čas  $T_0$  existují v bodě  $P_0$  přesné dráhové elementy

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)\tag{5.17}$$

které však neznáme. Pokud by na družici nepůsobily poruchové vlivy, snadno bychom podle vztahů (5.14) vypočítali dráhové elementy  $\boldsymbol{\varepsilon}_{ki}$  pro čas  $T_i$  a bod  $P_i$ . Ve skutečnosti se však družice pohybuje po víceméně obecné křivce a počátečním elementům  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  tak odpovídají elementy observované:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{oi} = (x_{oi}, y_{oi}, z_{oi}, \dot{x}_{oi}, \dot{y}_{oi}, \dot{z}_{oi})\tag{5.18}$$

Počáteční hodnoty dráhových elementů jsou však zatíženy chybou a my tedy známe jen

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0' = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + d\boldsymbol{\varepsilon}_0 = (x_0 + dx_0, y_0 + dy_0, z_0 + dz_0, \dot{x}_0 + d\dot{x}_0, \dot{y}_0 + d\dot{y}_0, \dot{z}_0 + d\dot{z}_0) \quad (5.19)$$

Z těchto elementů můžeme numerickou integrací a započtením poruchových vlivů získat dráhové elementy pro čas  $T_i$ :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ci} = (x_{ci}, y_{ci}, z_{ci}, \dot{x}_{ci}, \dot{y}_{ci}, \dot{z}_{ci}) \quad (5.20)$$

Rozdíl  $\boldsymbol{\varepsilon}_{ci} - \boldsymbol{\varepsilon}_{oi}$  jsou absolutní členy a jejich funkcemi jsou právě hledané opravy  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_0$ .

Pomocí nich pak zapíšeme vztahy pro výpočet oprav  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_i$  jako:

$$\Delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_0} \Delta x_0 + \frac{\partial x_i}{\partial y_0} \Delta y_0 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial \dot{z}_0} \Delta \dot{z}_0 \quad (5.21)$$

Ekvivalentní vztahy přirozeně platí také pro složky  $dy_i, dz_i$ .

### 5.4.2.2 Parciální derivace

Parciální derivace vystupující ve vztahu (5.20) vyjádříme jako derivaci rovnic (5.14):

$$\begin{pmatrix} \partial x_i / \partial \boldsymbol{\varepsilon}_0 \\ \partial y_i / \partial \boldsymbol{\varepsilon}_0 \\ \partial z_i / \partial \boldsymbol{\varepsilon}_0 \end{pmatrix} = \frac{\partial F_i}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + F_i \begin{pmatrix} \partial x_0 / \partial \boldsymbol{\varepsilon}_0 \\ \partial y_0 / \partial \boldsymbol{\varepsilon}_0 \\ \partial z_0 / \partial \boldsymbol{\varepsilon}_0 \end{pmatrix} + \frac{\partial G_i}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0} \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{pmatrix} + G_i \begin{pmatrix} \partial \dot{x}_0 / \partial \boldsymbol{\varepsilon}_0 \\ \partial \dot{y}_0 / \partial \boldsymbol{\varepsilon}_0 \\ \partial \dot{z}_0 / \partial \boldsymbol{\varepsilon}_0 \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

Navíc zde uvažujeme zjednodušení:

$$\frac{\partial x_0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0} = (1, 0, 0, 0, 0, 0) \quad \frac{\partial y_0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0} = (0, 1, 0, 0, 0, 0) \quad \frac{\partial z_0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0} = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$$

Parciální derivace  $\partial(F_i, G_i) / \partial \boldsymbol{\varepsilon}_0$  získáme zderivováním vztahů (5.15). Po úpravách dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0} &= (F_i - 1) \left[ \frac{r_0}{a} \frac{\partial(a/r_0)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0} + \cos \frac{E - E_0}{2} \frac{\partial(E - E_0)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0} \right] \\ \frac{\partial G_i}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0} &= \frac{1}{n^2} \frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0} n [G_i - (T_i - T_0)] + \frac{1}{n} [\cos(E_i - E_0) - 1] \frac{\partial(E_i - E_0)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Zde musíme určit parciální derivace  $\partial(a/r_0, E_i - E_0) / \partial \boldsymbol{\varepsilon}_0$ . To provedeme derivací vztahů (5.16). Nejprve (pro další výpočty) určíme

$$\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0} = -2\mu r^{-2} \frac{\partial r_0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0} - 2v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0} \quad (5.24)$$

kde uvažujeme zjednodušení

$$\frac{\partial r_0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0} = \left( \frac{x_0}{r_0}, \frac{y_0}{r_0}, \frac{z_0}{r_0}, 0, 0, 0 \right) \quad \frac{\partial v_0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0} = \left( 0, 0, 0, \frac{\dot{x}_0}{r_0}, \frac{\dot{y}_0}{r_0}, \frac{\dot{z}_0}{r_0} \right).$$

Potom můžeme psát

$$\frac{\partial a}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0} = -\frac{\mu}{W^2} \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0}, \quad \frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0} = \frac{3}{2} \frac{W^{1/2}}{\mu} \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0} \quad (5.25)$$

A po dalším odvození

$$\frac{\partial(E_i - E_0)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0} = \left[ (T_i - T_0)_{[h]} 3600 \frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0} + \sin(E_i - E_0) \frac{\partial(e \cos E_0)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0} + [\cos(E_i - E_0) - 1] \frac{\partial(e \sin E_0)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0} \right] \frac{a}{r_i} \quad (5.26)$$

Zde platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial(e \cos E_0)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0} &= \frac{1}{a} \frac{\partial r_0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0} + \frac{r_0}{a^2} \frac{\partial a}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0} \\ \frac{\partial(e \sin E_0)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0} &= \frac{W^{1/2}}{\mu} \frac{\partial(r_0 \dot{r}_0)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0} + \frac{1}{2} \frac{r_0 \dot{r}_0}{\mu} W^{1/2} \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0} \end{aligned} \quad (5.27)$$

kde

$$\frac{\partial(r_0 \dot{r}_0)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0} = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, x_0, y_0, z_0, ) \quad (5.28)$$

### 5.4.2.3 Linearizované rovnice oprav

Nyní můžeme konečně dosadit totální diferenciály  $\Delta x_i, \Delta y_i, \dots, \Delta z_i$  do linearizované rovnice oprav (5.21):

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial x_0} \Delta x_0 + \frac{\partial x_i}{\partial y_0} \Delta y_0 + \frac{\partial x_i}{\partial z_0} \Delta z_0 + \frac{\partial x_i}{\partial \dot{x}_0} \Delta \dot{x}_0 + \frac{\partial x_i}{\partial \dot{y}_0} \Delta \dot{y}_0 + \frac{\partial x_i}{\partial \dot{z}_0} \Delta \dot{z}_0 + (x_{ci} - x_{oi}) + \sum o_{xi} &= v_{xi} \\ \frac{\partial y_i}{\partial x_0} \Delta x_0 + \frac{\partial y_i}{\partial y_0} \Delta y_0 + \frac{\partial y_i}{\partial z_0} \Delta z_0 + \frac{\partial y_i}{\partial \dot{x}_0} \Delta \dot{x}_0 + \frac{\partial y_i}{\partial \dot{y}_0} \Delta \dot{y}_0 + \frac{\partial y_i}{\partial \dot{z}_0} \Delta \dot{z}_0 + (y_{ci} - y_{oi}) + \sum o_{yi} &= v_{yi} \\ \frac{\partial z_i}{\partial x_0} \Delta x_0 + \frac{\partial z_i}{\partial y_0} \Delta y_0 + \frac{\partial z_i}{\partial z_0} \Delta z_0 + \frac{\partial z_i}{\partial \dot{x}_0} \Delta \dot{x}_0 + \frac{\partial z_i}{\partial \dot{y}_0} \Delta \dot{y}_0 + \frac{\partial z_i}{\partial \dot{z}_0} \Delta \dot{z}_0 + (z_{ci} - z_{oi}) + \sum o_{zi} &= v_{zi} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Sumy v těchto rovnicích značí opravy absolutních členů, které v našem případě nebudeme uvažovat.

### 5.4.3 Konkrétní příklad vyrovnání dráhových elementů

Početně řeší úlohu vyrovnání dráhových elementů program vyrovnani.exe, který je na příloženém CD. Tento program jsem vytvořil v programovacím jazyku Delphi přepsáním

programu H2P2HAN.BAS poskytnutým prof. Kabeláčem a jeho úpravou a zjednodušením pro naši úlohu. Do programu vyrovnani.exe vstupují textové soubory s dráhovými elementy pro čas  $T_0$ , s dráhovými elementy vypočtenými programem integr.exe pro časy  $T_0 - T_k$  a konečně soubor se souřadnicemi měřenými aparaturou GPS na palubě družice, které odpovídají týmž časovým údajům intervalu  $T_0 - T_k$ . Protože se však nepodařilo sehnat skutečná naměřená data, bude program testován na fiktivním případě. V něm jsem bral za neporušené dráhové elementy hodnoty  $\epsilon_0$  družice MIMOSA uvedené v tabulce (5.19). Pomocí nich byly dále vypočteny (se započtením vlivu gravitačních polí Země a Měsíce a Slunce) souřadnice  $x_{oi}, y_{oi}, z_{oi}$ , které dále sloužily jako observované veličiny. Tyto hodnoty byly vypočteny po 6 minutách po dobu jedné otočky (celkem 1.7 h).

$x_0$ [m]	4.08648267134770E-10	$v_{x0}$ [m/s]	-8042.50429333026
$y_0$ [m]	3335500.000000001	$v_{y0}$ [m/s]	2.46331542714238E-13
$z_0$ [m]	5777255.46864599	$v_{z0}$ [m/s]	4.26658747487883E-13

Tab. 5.19: Bezvadné dráhové elementy družice MIMOSA

Do programu numerické integrace byly zadány hodnoty:

stupeň a řád Stokesových koeficientů . . . . . 20

délka kroku NI . . . . . 0.1 s

Juliánské datum - JD0 . . . . . 2452159.5

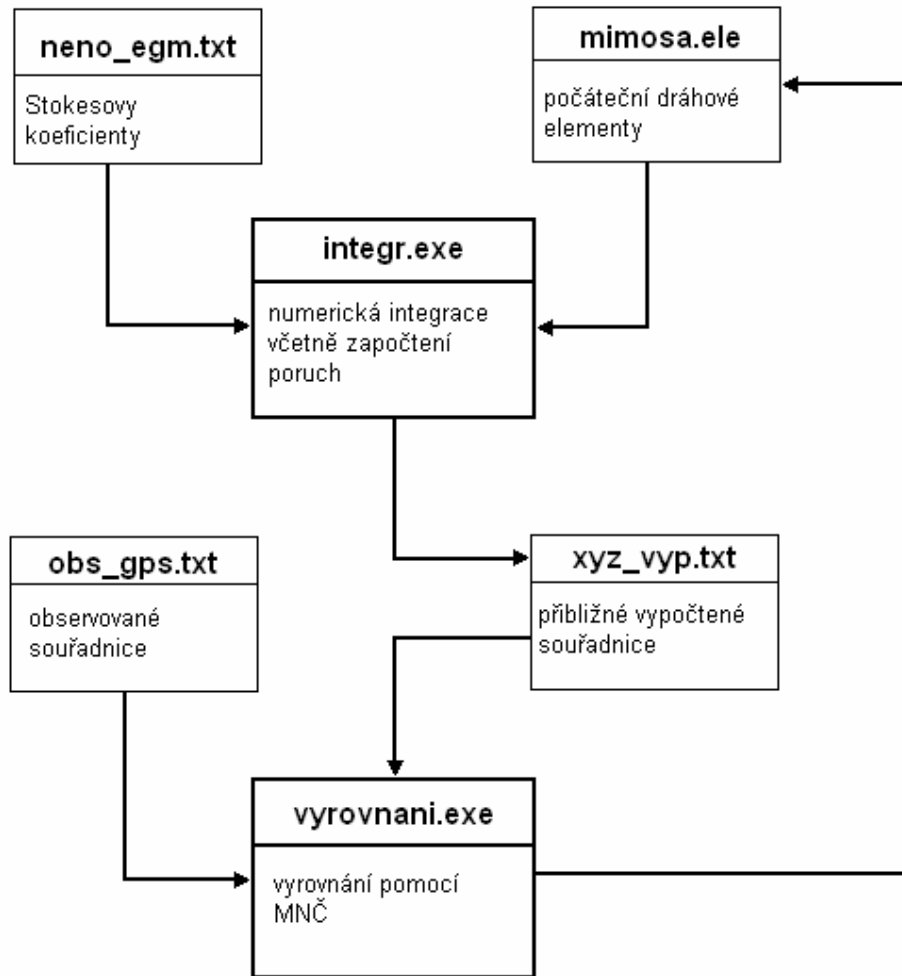
Dráhové elementy, které jsme považovaly za vypočtené vznikly porušením dráhových elementů  $\epsilon_0$  o hodnoty:

$dx$ [m]	+100	$dv_x$ [m/s]	-0.1
$dy$ [m]	+100	$dv_y$ [m/s]	-0.1
$dz$ [m]	+100	$dv_z$ [m/s]	-0.1

Tab. 5.20: Zavedené poruchy dráhových elementů

Tyto počáteční dráhové elementy jsou vstupními hodnotami pro výpočet přibližných souřadnic  $x_{ci}, y_{ci}, z_{ci}$ . Výsledkem výpočetního procesu je soubor s vyrovanými dráhovými elementy, které posléze mohou vstupovat do dalšího cyklu jako  $\epsilon_0$ . Celý postup je znázorněn na obrázku (5.1).





Obr. 5.1: Schema výpočetních programů numerické integrace a vyrovnání dráhových elementů

Pro výše uvedený příklad jsem opakovl cyklus třikrát, což stačilo k uspokojivým výsledkům. V následující tabulce jsou uvedeny odchylky dráhových elementů po jednotlivých vyrovnáních od elementů observovaných.

vyr.	dx [m]	dy [m]	dz [m]	dv <sub>x</sub> [m/s]	dv <sub>y</sub> [m/s]	dv <sub>z</sub> [m/s]
0.	100,00	100,00	50,00	0,10	0,10	0,10
1.	-0,618	0,598	0,334	2,327E-4	-1,188E-03	-6,156E-04
2.	-2,200E-02	1,188E-02	1,491E-2	1,674E-5	-1,483E-05	-2,396E-05
3.	-1,616E-04	1,034E-04	1,219E-4	1,119E-7	-8,445E-08	-1,676E-07

Tab. 5.21: Odchylky počátečních dráhových elementů od bezvadných hodnot po jednotlivých vyrovnáních

Jak je vidět, již po malém počtu opakování dostáváme velmi dobrou shodu vyrovnaných a observovaných souřadnic – v tomto případě v desetinách milimetru u souřadnic. Podobnými úlohami se ve své diplomové práci [9] zabírala také Hana Žlábková . Ta však došla k podobně přesným výsledkům až po značném počtu – řádově až po stovkách - opakování vyrovnání.

## 6. Výpočty pro případ družice MIMOSA

V této kapitole budou aplikovány programy pro výpočet gravitačních poruch na případu družice MIMOSA. Vstupními hodnotami budou dráhové elementy (tab. 6.1), které se vztahují k juliánskému datu 2452821. To odpovídá 30.VI. 2003, kdy byla družice vypuštěna.

MIMOSA			
x [m]	-858265.949970051	$v_x$ [m/s]	-7447.099674349220
y [m]	-942720.583258900	$v_y$ [m/s]	-903.493137631069
z [m]	-6861652.739817200	$v_z$ [m/s]	766.308717150739

Tab. 6.1: Dráhové elementy družice MIMOSA

V následujících odstavcích budou postupně uvedeny výsledky numerického řešení keplerovského pohybu družice MIMOSA a dále pak vlivy gravitačního pole Země a gravitačního pole Měsíce a Slunce. Tyto úlohy jsou řešeny pro dobu tří otoček, což činí v případě družice MIMOSA necelých pět hodin. Délka kroku numerické integrace je definována jako 1/5000 délky otočky, což odpovídá úseku přibližně 1.15 s.

### 6.1 Keplerovský pohyb

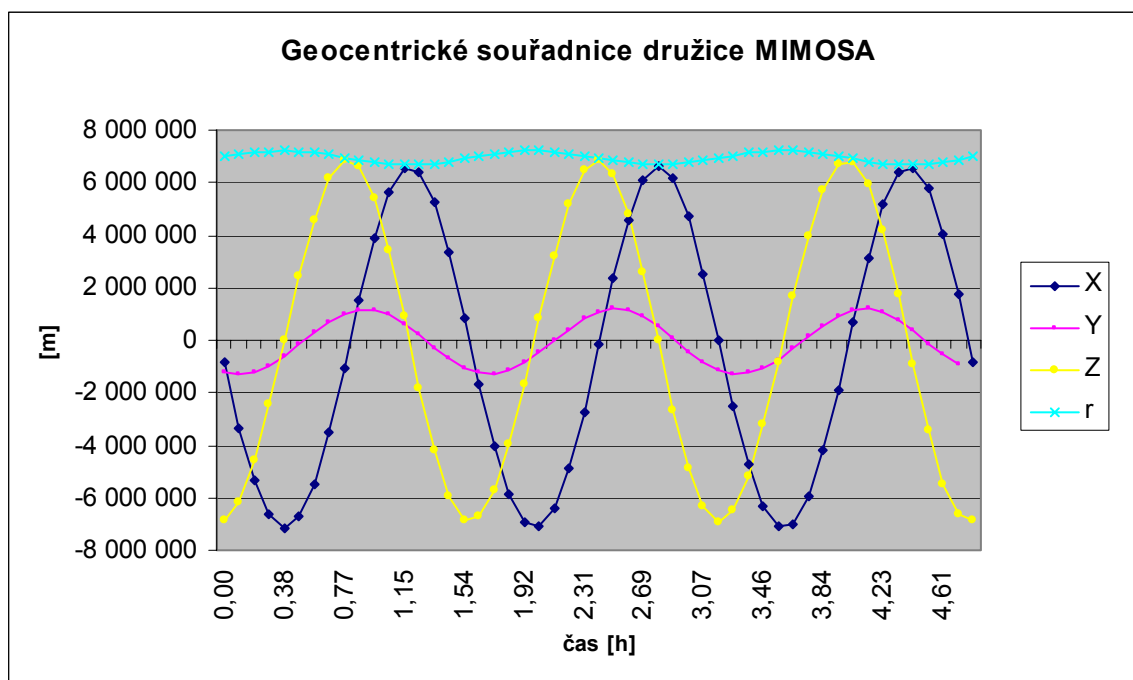
Tabulka (6.2) udává hodnoty geocentrických souřadnic vztažených k jarnímu bodu a velikost průvodiče družice MIMOSA.

čas [h]	x [m]	y [m]	z [m]	r [m]
0.00	-858265.95	-942720.58	-6861652.74	6979084.53
0.29	-6663785.17	-1186205.13	-2444907.71	7196574.82
0.58	-5465030.30	-176335.30	4595866.36	7142803.23
0.86	1535944.14	1004524.81	6622746.39	6872333.24
1.15	6555544.14	982465.22	876355.88	6686433.77
1.44	3316994.96	-274394.75	-5950538.78	6818112.63
1.73	-4052267.94	-1229599.40	-5699068.33	7100152.82
2.02	-7110408.13	-849640.14	839444.51	7210024.92
2.31	-2712657.15	418829.05	6477728.90	7035261.07
2.59	4566677.88	1194326.10	4836579.96	6758214.81
2.88	6139789.72	501286.59	-2650669.72	6706292.27
3.17	4764.58	-831459.20	-6896114.79	6946059.77
3.46	-6308827.28	-1230808.18	-3207986.04	7183826.61
3.75	-5975867.49	-324244.79	3936241.96	7163108.80
4.04	680895.30	912806.43	6810327.13	6904881.57
4.32	6369045.60	1064020.04	1758962.00	6692595.00
4.61	4040847.73	-117822.74	-5455222.37	6789829.43

Tab 6.2: Výpočty keplerovského pohybu.

Jak je dobře vidět na grafickém vyjádření (graf 6.1), hodnoty jednotlivých souřadnic odpovídají funkci sinus s periodou jedné otočky družice. Součtu těchto složek je křivka

udávající průběh velikosti průvodiče  $r$ , na které je patrná excentricita elipsy, po které družice obíhá.



Tab 6.1: Geocentrické souřadnice družice MIMOSA

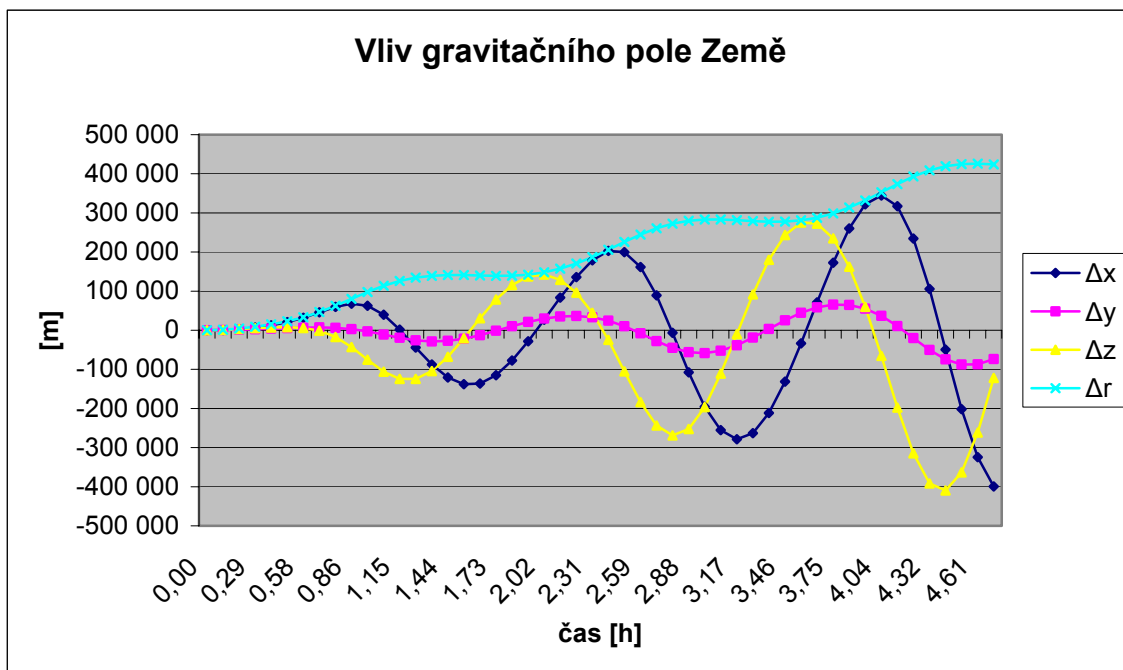
## 6.2 Vliv gravitačního pole Země

V následující tabulce (6.3) uvádím rozdíly mezi keplerovským pohybem družice a pohybem se započteným vlivem gravitačního pole Země. Hodnoty  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  označují odchylky v jednotlivých souřadnicích a  $\Delta r$  je celková odchylka průvodiče.

čas [h]	$\Delta x$ [m]	$\Delta y$ [m]	$\Delta z$ [m]	$\Delta r$ [m]
0	0.00	0.00	0.00	0.00
0.288221	6885.78	2625.82	5310.44	9083.48
0.576441	32021.30	6733.40	5898.32	33248.95
0.864662	67791.15	3010.49	-42890.87	80276.58
1.152882	1538.76	-19401.07	-124459.78	125972.24
1.441103	-120776.00	-27192.01	-67962.94	141227.51
1.729323	-114902.97	-1376.40	78369.21	139091.05
2.017544	26971.64	29728.63	142381.30	147931.39
2.305764	178607.38	33052.34	44636.53	187044.04
2.593985	161455.87	-7971.76	-183730.36	244721.05
2.882205	-107582.79	-55974.44	-252333.93	279963.58
3.170426	-278664.01	-38521.41	-9806.97	281484.83
3.458646	-131526.62	25532.47	243344.97	277791.17
3.746867	172829.29	65587.37	234658.02	298724.04
4.035087	344575.72	36723.07	-65304.69	352626.88
4.323308	105384.87	-50415.01	-391537.56	408594.30
4.611528	-324634.07	-87248.55	-261443.34	425854.68

Tab. 6.3: Vliv gravitačního pole Země

Pro lepší názornost opět uvádím příslušný graf (6.2). Velikost odchylky se již během prvních tří otoček pohybuje řádově ve stovkách kilometrů a její průběh má periodický charakter.



Graf 6.2: Vliv gravitačního pole Země na družici MIMOSA

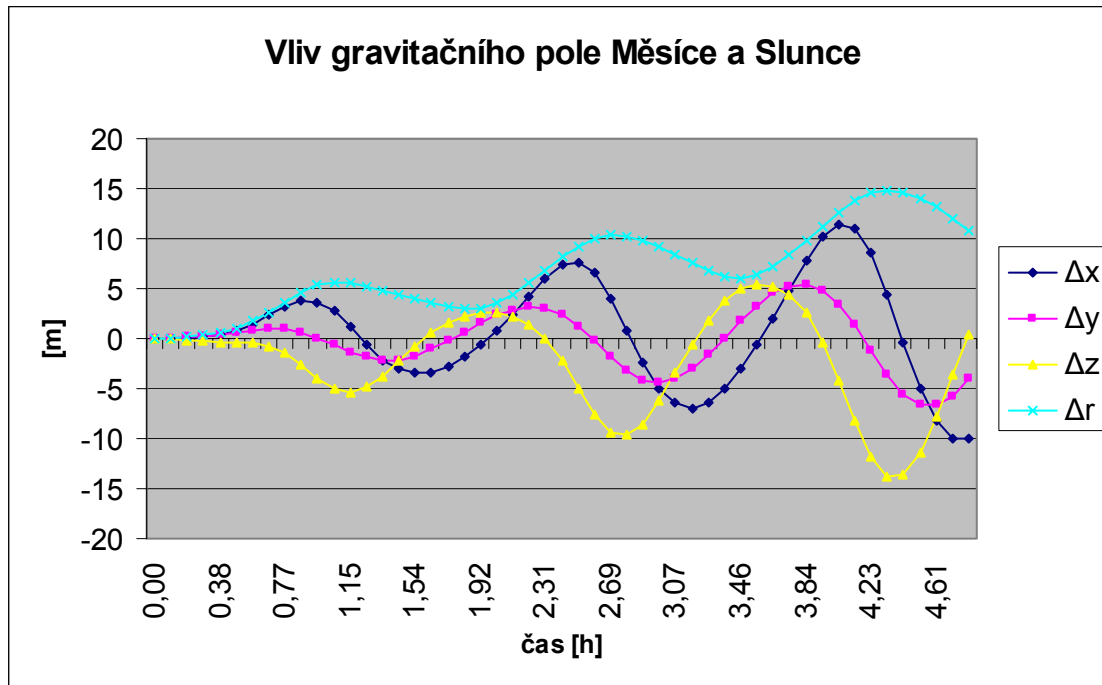
### 6.3 Gravitační vliv Měsíce a Slunce

Poslední poruchou na dráhu umělých družic Země, kterou jsem se zabýval, je vliv gravitačního pole Měsíce a Slunce. Podobně jako v předchozím odstavci uvedu odchylky souřadnic a průvodiče od keplerovského pohybu (odstavec 6.1).

čas [h]	$\Delta x$ [m]	$\Delta y$ [m]	$\Delta z$ [m]	$\Delta r$ [m]
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,29	0,18	0,28	-0,24	0,41
0,58	1,43	0,88	-0,41	1,73
0,86	3,84	0,61	-2,57	4,67
1,15	1,11	-1,34	-5,33	5,60
1,44	-3,09	-2,10	-2,28	4,38
1,73	-2,76	-0,26	1,60	3,20
2,02	0,78	2,33	2,57	3,56
2,31	6,09	3,01	-0,07	6,79
2,59	6,56	-0,22	-7,57	10,02
2,88	-2,40	-4,17	-8,50	9,77
3,17	-6,90	-3,09	-0,57	7,59
3,46	-3,01	1,71	4,93	6,02
3,75	4,85	5,25	4,34	8,36
4,04	11,48	3,38	-4,12	12,66
4,32	4,41	-3,56	-13,77	14,89
4,61	-8,28	-6,66	-7,80	13,19

Tab 6.4: Vliv gravitačního pole Měsíce a Slunce

Také v následujícím grafu je možné v jednotlivých souřadnicích i v průvodiči pozorovat periodický charakter poruch. Jejich průběh je v tomto případě složitější křivka, která vznikla součtem poruch od Měsíce a od Slunce. Každá z těchto poruch má jinou délku periody, což by se při dlouhodobějším pozorování projevilo i na výsledné křivce.



Graf 6.3: Vliv gravitačního pole Měsíce a Slunce

## Závěr

Hlavní výsledky této diplomové práce se dají rozdělit na dvě části. První z nich je program pro výpočet souřadnic numerické integrace. Ten umožňuje kromě počítání nerušeného keplerovského pohybu také započítání vlivu gravitačního pole Země a/nebo vlivu gravitačního pole Měsíce a Slunce. Snažil jsem se, aby tento program nejen poskytoval přesné výsledky, ale také aby byl přehledný, a aby bylo možné snadno a rychle zadávat a editovat vstupní hodnoty. Výsledky samy byly vesměs úspěšně porovnány s výsledky stejných úloh od jiných autorů. Rozbor výsledků praktických úloh byla provedena zejména v páté a šesté kapitole.

Druhá významná část této práce bylo sestavení programu, který umožní postupným vyrovnáním zpřesňovat vypočtené dráhové elementy družice, jsou-li pro daný časový interval známy souřadnice přímo pozorované. Já jsem se zabýval konkrétně případem družice MIMOSA, která má na své palubě umístěn přístroj GPS, který by měl přímo měřené souřadnice poskytovat. Bohužel se nepodařilo tato data získat a tak testování programu muselo proběhnout pouze na fiktivních datech (podrobněji popsáno v příslušných partiích této práce), což je jistě škoda.

Tato práce si přirozeně nemůže činit nárok na vyčerpávající řešení dané problematiky. Naskýtá se celá řada dalších možných rozšíření a zlepšení. V případě numerické integrace to může být zejména započítání dalších poruchových vlivů působících na dráhu družice. U vyrovnání dráhových elementů by mohly být kromě souřadnic měřeny také složky rychlosti, které by pak do vyrovnání vstupovaly společně se souřadnicemi. Z hlediska uživatele se nabízí možnost oba zmiňované programy spojit a tím celý výpočetní postup zpřehlednit.

## Použitá literatura

- [1] M. Burša, J. Kostecký: *Kosmická geodezie a kosmická geodynamika*. MO, Generální štáb AČR, 1993.
- [2] M. Burša, G. Karský, J. Kostecký: *Dynamika umělých družic v tíhovém poli Země*. Academia, Praha 1993.
- [3] O. Montenbruck, E. Gill: *Sattelite Orbits – Models, Methods, Applications*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2001.
- [4] J. Kabeláč: *Kosmická geodezie II*. Skriptum ČVUT.
- [5] J. Kabeláč: *Geodetické metody vyrovnání, díl 1*. Skriptum ZČU, Plzeň, 2004.
- [6] J. Kabeláč: *Určení dráhových elementů družice MIMOSA přístrojem GPS umístěným na její palubě*. Geodetický a kartografický obzor, roč.91, č. 3, 2003.
- [7] J. Kabeláč: *Orbitální úloha družicové geodezie*. Sborník ke 100. výročí narození prof. E. Buchara.
- [8] T. Pešek: *Poruchové vlivy Země, Měsíce, Slunce, planet a slapové účinky Měsíce a Slunce na družici MIMOSA*. Diplomová práce ZČU, Plzeň, 2003.
- [9] H. Žlábková: *Určení dráhových elementů umělé družice Země, jsou-li měřeny jejich prostorové souřadnice*. Diplomová práce, ZČU, Plzeň, 2002.
- [10] E. Vitásek: *Numerické metody*. Nakladatelství technické literatury, Praha 1987.
- [11] P. Příkryl, M. Brandner: *Numerické metody II*. Skripta ZČU, Plzeň, 2000.
- [12] S. Písek: *Delphi – začínáme programovat*. Grada Publishing a. s., Praha 2002.
- [13] J. Kabeláč: *Přednášky z předmětu Geodetická astronomie*. Plzeň, 2003.
- [14] P. Tomášek: <http://www.etf.cuni.cz/~tomasek/cgi-bin/t?cmd=getjdd&jd=2452159>
- [15] kolektiv autorů: <http://projekty.astro.cz/adict/>. Astronomický slovníček.
- [16] [http://www.asu.cas.cz/~macek/mimosa\\_cz1250.html](http://www.asu.cas.cz/~macek/mimosa_cz1250.html). Astronomický ústav AV ČR.

# Přílohy

## A1 Seznam konstant

konstanta	rozměr	hodnota	název
$\mu$ (GM)	$[\text{m}^3\text{s}^{-2}]$	398600441800000	geocentrická gravitační konstanta
$\mu_M$ (GM <sub>M</sub> )	$[\text{m}^3\text{s}^{-2}]$	4902800000000	selenocentrická gravitační konstanta
$\mu_S$ (GM <sub>S</sub> )	$[\text{m}^3\text{s}^{-2}]$	1,3271244E+20	heliocentrická gravitační konstanta
$a$	m	6378137	poloměr rovníku Země
AU	m	149597870660	astronomická jednotka



## A2 Programová dokumentace

V této části přílohy popíšu z hlediska uživatele programy *integr.exe* a *vyrovnani.exe*, které jsou součástí této diplomové práce.

### A2.1 Program *integr.exe*

Program *integr.exe* je naprogramován v jazyku Delphi a je určen pro operační systém Windows 95 a novější. Po spuštění souboru otevřeme následující okno:

The dialog box 'Numerická integrace' contains the following elements:

- 1:** Input fields for initial coordinates and velocities:
  - $X_o$ : -0,00016155652636875
  - $Y_o$ : 3335500,00010339
  - $Z_o$ : 5777255,46876786
  - $dx_o$ : -8042,50429321838
  - $dy_o$ : -8,445336668E-8
  - $dZ_o$ : -1,6758471438E-7
- 2:** Step length and count fields:
  - Délka kroku [s]: 1
  - Počet kroků: 36000
  - Kroků za otočku: [empty]
  - Počet otoček: [empty]
- 3:** Checkboxes and date/angle fields:
  - Vliv Měsíce a Slunce
  - Vliv Země
  - Juliánské datum: 2452159,5
  - Stupeň a řád: 10
- 4:** Output file path: C:\dokumenty\\_diplomka\\_testovani\HU1\data\zacatek\NI.txt
- 5:** 'Vypočet' button and a progress bar showing 0%.

Fungování programu popíšu stručně v bodech a uvedu také formáty souborů, se kterými program pracuje:

#### 1. Zadání vstupního souboru dráhových elementů

Po stisknutí tlačítka *Procházet...* se objeví klasické dialogové okno pro výběr souboru. Cestu k němu je samozřejmě také možno zadat ručně přímo do editační řádky. Formát textového souboru s dráhovými elementy je následující:

```
<x [m]>  
<y [m]>  
<z [m]>  
<dx [m/s]>  
<dy [m/s]>  
<dz [m/s]>  
<doba otočky[hod]>,
```

kde poslední řádek je nepovinný. Po stisknutí tlačítka *Načti* se dráhové elementy zobrazí v příslušných editačních řádkách. Kromě načítání ze souboru je můžeme zadat také ručně.

## 2. Volba délky a počtu kroků numerické integrace

Pomocí přepínacích tlačítek se rozhodneme, chceme-li zadat délku a počet kroků NI přímo, či jako zlomek délky otočky družice. V druhém případě musí být v editačním okně *Otočka* zadána doba oběhu.

## 3. Započtení poruch

Chceme-li do numerické integrace zadat také poruchové vlivy, označíme příslušná zaškrtačací políčka. Pro výpočet alespoň jedné z obou možných poruch je nutné, aby bylo zadáno Juliánské datum. Pro poruchy od Země je navíc potřeba definovat hodnotu stupně a řádu Stokesových koeficientů.

## 4. Výstupní soubor

Výstupní soubor zadáme standardním způsobem, podobně jako tomu bylo u volby souboru vstupního. Dále vybereme, po kolika krocích se mají vypočtené dráhové elementy vypisovat. Formát výstupního souboru bude:

```
<krok NI>  
<čas od počátku NI [hod]>  
<x [m]>      <y [m]>      <z [m]>  
<dx [m/s]>   <dy [m/s]>   <dz [m/s]>  
<další krok NI>
```

...

## 5. Výpočet

Stiskem tlačítka *Výpočet* se spustí proces numerické integrace. Jeho průběh můžeme sledovat na ukazateli.

## A2.1 Program vyrovnani.exe

Při popisu fungování programu vyrovnani se budu držet stejného postupu jako v předchozí kapitole. Spustíme soubor vyrovnani.exe a otevře se úvodní okno:

1 — Počáteční dráhové elementy: C:\dokumenty\\_diplomka\\_testovani\HU2\po1\vyr\mimosa.ele Procházet...

2 — Observované hodnoty: C:\dokumenty\\_diplomka\\_testovani\HU2\po1\vyr\OBS\_GPS.t Procházet...

3 — Vypočtené hodnoty: C:\dokumenty\\_diplomka\\_testovani\HU2\po1\vyr\XYZ\_VYP.t Procházet...

4 — Počet dráhových elementů ve vstupních souborech: 10

7 — Výpočet

5 — Vyrovnané dráhové elementy: C:\dokumenty\\_diplomka\\_testovani\HU2\po1\vyr\vyysl.ele Procházet...

6 — Protokol o výpočtu: \dokumenty\\_diplomka\\_testovani\HU2\po1\vyr\protokol.txt Procházet...

### 1. Soubor počátečních dráhových elementů

Jedná se o soubor porušených dráhových elementů, které budou vyrovnávány. Formát souboru je stejný jako pro vstupní soubor programu *integr.exe*, který je uveden v předchozí části přílohy.

### 2. Observované hodnoty

Zde se zadává soubor se souřadnicemi přímo měřenými pomocí aparatury GPS umístěné na palubě družice. Formát souboru je:

```
<T0>      <x0> <y0> <z0>
<T1>      <x1> <y1> <z1>
```

...

kde  $T_i$  je čas od počátku NI a hodnoty  $x_i, y_i, z_i$  k němu příslušné souřadnice.

### 3. Vypočtené hodnoty

Tento soubor obsahuje dráhové elementy vypočítané z porušených počátečních elementů. Používá se výstupní soubor z programu *integr.exe*, jehož formát byl již popsán v předchozí kapitole v odstavci 4. Počet záznamů v tomto souboru se musí rovnat počtu záznamů souboru s observovanými elementy.

### 4. Počet dráhových elementů ve vstupních souborech

Tady nastavíme počet dráhových elementů v souborech se souřadnicemi vypočtenými a přímo měřenými. Počet záznamů v těchto dvou souborech se musí rovnat!

### 5. Vyrovnané dráhové elementy

Vybereme soubor, do kterého se zapíše výsledné vyrovnané dráhové elementy pro čas  $T_0$ . Formát tohoto souboru byl již popsán.

### 6. Protokol o výpočtu

V tomto souboru jsou vypsány některé důležité hodnoty z průběhu vyrovnání. Jsou to:

- náhodné opravy  $v_i$
- střední jednotková chyba  $M_0$
- střední chyby jednotlivých neznámých  $m_{x_i}$

## A3 Výpisy zdrojových kódů programů

### A3.1 integr.dpr

```
program integr;

uses
  Forms,
  Un_NI in 'Un_NI.pas' {Form1};

{$R *.res}

begin
  Application.Initialize;
  Application.CreateForm(TForm1, Form1);
  Application.Run;
end.
```

### A3.2 un\_NI.pas

```
unit Un_NI;

interface

uses
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,
  Dialogs, StdCtrls, Math, Gauges, Spin;

type
  RdR = record
    x : extended;
    y : extended;
    z : extended;
    dx : extended;
    dy : extended;
    dz : extended;
  end;

  TForm1 = class(TForm)
    EdCtiSoubor: TEdit;
    BtnBrowse1: TButton;
    OpnDlgXYE1: TOpenDialog;
    LblX: TLabel;
    LblY: TLabel;
    LblZ: TLabel;
    LblDX: TLabel;
    LblDZ: TLabel;
    LblDY: TLabel;
    EdX: TEdit;
    EdY: TEdit;
    EdZ: TEdit;
    EddX: TEdit;
    EddY: TEdit;
    EddZ: TEdit;
    LblVstup: TLabel;
    EdVystup: TEdit;
    BtnBrowse2: TButton;
    EdOtoc: TEdit;
    Label1: TLabel;
    Label3: TLabel;
    Label4: TLabel;
    EdKroky: TEdit;
    EdPocet: TEdit;
    LblVystup: TLabel;
    SaveDlg: TSaveDialog;
    BtnNacti: TButton;
    BtnVypocet: TButton;
    ChBZeme: TCheckBox;
    Gauge: TGauge;
    ChBMeSlu: TCheckBox;
    EdDelka: TEdit;
    EdPocKrok: TEdit;
    Label5: TLabel;
    Label6: TLabel;
  end;
```

```

RBtnA: TRadioButton;
RBtnB: TRadioButton;
Label7: TLabel;
Label8: TLabel;
SpEd1: TSpinEdit;
Label9: TLabel;
Label10: TLabel;
EdJD0: TEdit;
SpEdstrad: TSpinEdit;
procedure BtnBrowse1Click(Sender: TObject);
procedure BtnBrowse2Click(Sender: TObject);
procedure BtnNactiClick(Sender: TObject);
procedure BtnVypocetClick(Sender: TObject);
procedure EdKrokyChange(Sender: TObject);
procedure EdPocetChange(Sender: TObject);
procedure RungeKutta(x,y,z,dx,dy,dz : extended; h : extended; n : integer; FileName :
string);
procedure RBtnAClick(Sender: TObject);
procedure RBtnBClick(Sender: TObject);
private
{ Private declarations }
public

{ Public declarations }
end;

const GM = 398600441800000;
      Gmm = 4902800000000;
      Gms = 1.3271244e+20;
//      JD0 = 2452133.5;
      ro = 180 / pi;
      rol = pi / 180;
      a = 6378137;
      AU = 149597870660;

var
Form1 : TForm1;
f, fr : TextFile;
pom : RdR;
h, rev : extended;
T0, kro : extended; //pocatek NI, pocet kroku jedne otocky
poc, n : integer; // pocet otocek
Fzem, FMeSlu : array [1..3] of extended;
cvypis : integer;
i,k : integer;
CC,SS : array [1..150, 1..150] of extended;
pomCC, pomSS : extended;
strad: integer;
JD0: real;
implementation

{$R *.dfm}

procedure VlivZeme(x, y, z, TA, XP, YP: extended; strad : integer);
{*****}
* x,y,z ..... geocentricke souradnice vztazene k jarnimu bodu *
* TA ..... cas od zacatku NI *
* XP, YP ..... souradnice okamzite polohy polu *
* strad ..... stupen a rad Stokesovych koeficientu *
{*****}

var Tuto,S, S0, S0sto, eps, Tsto, Tnoc, Trok, EE, ro : extended;
    XT, YT, ZT, RT, fi, lam : extended;
    S0int : integer;
    P, D : array[0..150, 0..150] of extended;
    fr : TextFile;
    k, i : integer;
    drr, drf, drl : extended;
    pomR, pomF, pomL : extended;
    pomCC, pomSS, Fpom : extended;
    FC : array [1..3] of extended;
    fw : textfile;

begin
// prevod casu
//TA := TA / 3600;

```

```

Tuto := TA;
Tnoc := (JD0 - 2451545) / 36525;
S0 := 24110.54841 + 8640184.812866 * Tnoc + 0.093104 * Tnoc*Tnoc - 6.2e-6 * Power(Tnoc, 3);
S0 := S0 / 3600;

S0int := trunc(S0 / 24);
S0 := S0 - S0int * 24;
S := S0 + Tuto * 1.002737909350795;

Tsto := Tnoc + Tuto / 24 / 36525;
Trok := Tsto / 2;
eps := 0.409092804 - 0.000226965525 * Tsto;
EE := S * 15 * rol;

// transformace souradnic
XT := x * cos(EE) + y * sin(EE) + XP * z * rol / 3600;
YT := -x * sin(EE) + y * cos(EE) - YP * z * rol / 3600;
ZT := (x * (-XP * cos(EE) - YP * sin(EE)) + y * (-XP * sin(EE) + YP * cos(EE))) * rol / 3600 +
z;

RT := sqrt(sqr(XT) + sqr(YT) + sqr(ZT));
fi := arcsin(ZT / RT);
lam := arcsin(YT / sqrt(sqr(XT) + sqr(YT)));

if (cos(lam) - XT / sqrt(sqr(XT) + sqr(YT))) >= 1.0e-06
then lam := pi - lam;

// vypočet legendrových polynomů a jejich derivací
P[0,0] := 1;
D[0,0] := 0;
P[1,0] := sin(fi);
D[1,0] := 1;
P[1,1] := cos(fi);
D[1,1] := -tan(fi);

for i := 2 to strad do begin
  P[i,i] := (2*i - 1) * cos(fi) * P[i-1, i-1];
  P[i, i-1] := (2*i - 1) * sin(fi) * P[i-1, i-1];
  D[i,i] := (i) * (2*i - 1) * cos(fi) * D[i-1,i-1] / (i-1);
  D[i, i-1] := (2*i - 1) * (i * sin(fi) - 1 / sin(fi)) * D[i-1,i-1] / (i-1);
end;

for i := 2 to strad do begin
  for k := 0 to (i - 2) do begin
    P[i, k] := ((2*i-1) * sin(fi) * P[i-1,k] - (i+k-1) * P[i-2,k]) / (i-k);
    D[i, k] := (i * sin(fi) * P[i,k] - (i+k) * P[i-1,k]) / (sqr(sin(fi)) - 1);
  end;
end;

// r := 0;
drr := 0; drf := 0; drl := 0;

for i := 2 to strad do begin
  pomR := 0; pomF := 0; pomL := 0;
  for k := 0 to i do begin
    pomR := pomR + (CC[i,k] * cos(k*lam) + SS[i,k] * sin(k*lam)) * P[i,k];
    pomF := pomF + (CC[i,k] * cos(k*lam) + SS[i,k] * sin(k*lam)) * D[i,k];
    pomL := pomL + k * (-CC[i,k] * sin(k*lam) + SS[i,k] * cos(k*lam)) * P[i,k];
  end;
  pomR := pomR * (i+1) * Power((a / RT), i);
  drr := drr + pomR;

  pomF := pomF * Power((a / RT), i);
  drf := drf + pomF;
  pomL := pomL * Power((a / RT), i);
  drl := drl + pomL;
end;

DRR := -DRR * GM / sqrt(RT);
DRF := DRF * cos(fi) * GM / RT;
DRL := DRL * GM / RT;

FC[1] := drr*cos(fi)*cos(lam) - drf*sin(fi)*cos(lam)/RT - drl*sin(lam)/(RT*cos(fi));
FC[2] := drr*cos(fi)*sin(lam) - drf*sin(fi)*sin(lam)/RT + drl*cos(lam)/(RT*cos(fi));
FC[3] := drr*sin(fi) + drf*cos(fi)/RT + 0;

Fpom := sqrt(sqr(FC[1])+sqr(FC[2])+sqr(FC[3]));

```

```

Fzem[1] := FC[1]*cos(EE) - FC[2]*sin(EE) + FC[3]*((-XP*cos(EE)-YP*sin(EE))*rol/3600);
Fzem[2] := FC[1]*sin(EE) + FC[2]*cos(EE) + FC[3]*((-XP*sin(EE)+YP*cos(EE))*rol/3600);
Fzem[3] := FC[1]*XP*rol/3600 - FC[2]*YP*rol/3600 + FC[3];

end;

procedure VlivMesicSlunce(x, y, z, TA : extended);
{*****
* x,y,z ..... geocentricke souradnice vztazene k jarnimu bodu *
* TA ..... cas od zacatku NI *
*****}
var
Tuto, Tnoc, S0, S, Tsto, Trok, eps : extended;
S0int : integer;
EE, Ldel, LsCdel, Fdel, Ddel, OMdel, L01, O01, OM1, LAMm, BEm, RR1 : extended;
Xek1, Yek1, Zek1, Xlm, Ylm, Zlm : extended;
L2, L3, L4, L5, A02, L02, K02, H02, Q02, P02 : extended;
DELA2, DELL2, DELK2, DELH2 : extended;
A2s1, K2, H2, Q2, P2, EX2, O2, DIF, II2, OM2, MM2, E2, V2, R2s1, U : extended;
Xek2, Yek2, Zek2, LA, LAM, X2, Y2, Z2 : extended;
AL, DE, MM, MN, VM, VN, dAL, dDE, XS, YS, ZS : extended;
Rslunce, RQS, RQm : extended;
Fmesic, Fslunce : array [1..3] of extended;

begin

Tuto := TA;
Tnoc := (JD0 - 2451545) / 36525;
S0 := 24110.54841 + 8640184.812866 * Tnoc + 0.093104 * Tnoc*Tnoc - 6.2e-6 * Power(Tnoc, 3);
S0 := S0 / 3600;

S0int := trunc(S0 / 24);
S0 := S0 - S0int * 24;
S := S0 + Tuto * 1.002737909350795;

Tsto := Tnoc + Tuto / 24 / 36525;
Trok := Tsto / 2;
eps := 0.409092804 - 0.000226965525 * Tsto;
EE := S * 15 * rol;

// vycet efemerid Mesice
Ldel := (485867 + 1717915923 * Tsto + 31 * sqr(Tsto)) / 3600 * rol;
LsCdel := (1287100 + 129596581 * Tsto) / 3600 * rol;
Fdel := (335779 + 1739527263 * Tsto) / 3600 * rol;
Ddel := (1072261 + 1602961601 * Tsto) / 3600 * rol;
OMdel := (450160 - 6962891 * Tsto) / 3600 * rol;

// stredni elementy MESICE
L01 := 785940 + 1732564373 * Tsto;
O01 := 300072 + 14648449 * Tsto;
OM1 := 450160 - 6962890 * Tsto;

// vycet ekliptikalnich souradnic MESICE
LAMm := L01 + 22640 * sin(Ldel) - 4586 * sin(Ldel - 2 * Ddel) + 2370 * sin(2 * Ddel);
LAMm := LAMm + 769 * sin(2 * Ldel) - 666 * sin(LsCdel) - 412 * sin(2 * Fdel);
LAMm := LAMm - 212 * sin(2 * Ldel - 2 * Ddel) - 205 * sin(Ldel + LsCdel - 2 * Ddel);
LAMm := LAMm + 192 * sin(Ldel + 2 * Ddel) - 165 * sin(LsCdel - 2 * Ddel);
LAMm := LAMm + 147 * sin(Ldel - LsCdel) - 125 * sin(Ddel) - 109 * sin(Ldel + LsCdel);
BEm := 1010 * sin(Ldel + Fdel) + 1000 * sin(Ldel - Fdel);
BEm := BEm - 167 * sin(Ldel - 2 * Ddel + Fdel) - 199 * sin(Ldel - 2 * Ddel - Fdel);
BEm := BEm + 117 * sin(2 * Ddel + Fdel) + 624 * sin(2 * Ddel - Fdel);
BEm := BEm + 18461 * sin(Fdel);
RR1 := 385000 - 20905 * cos(Ldel) - 3699 * cos(Ldel - 2 * Ddel) - 2956 * cos(2 * Ddel);
RR1 := RR1 - 570 * cos(2 * Ldel);
RR1 := RR1 + 246 * cos(2 * Ldel - 2 * Ddel) - 152 * cos(Ldel + LsCdel - 2 * Ddel);
RR1 := RR1 - 171 * cos(Ldel + 2 * Ddel) - 205 * cos(LsCdel - 2 * Ddel);
RR1 := RR1 - 130 * cos(Ldel - LsCdel) + 109 * cos(Ddel) + 105 * cos(Ldel + LsCdel);
RR1 := RR1 + 49 * cos(LsCdel) + 80 * cos(Ldel - 2 * Fdel);
RR1 := RR1 - 35 * cos(Ldel - 4 * Ddel) + 31 * cos(LsCdel + 2 * Ddel);
RR1 := RR1 * 1000;
LAMm := LAMm / 3600;
LAMm := LAMm - trunc(LAMm/360) * 360;
BEm := BEm / 3600;
BEm := BEm - trunc(BEm / 3600) * 360;
LAMm := LAMm * rol;

```

```

BEm := BEm * ro1;
Xek1 := RR1 * cos(BEm) * cos(LAMm);
Yek1 := RR1 * cos(BEm) * sin(LAMm);
Zek1 := RR1 * sin(BEm);
// vypocet geocentrickych pravouhlych souradnic MESICE v rovníkové soustavě
Xlm := Xek1;
Ylm := Yek1 * cos(eps) - Zek1 * sin(eps);
Zlm := Yek1 * sin(eps) + Zek1 * cos(eps);

// vypocet efemerid Slunce
L2 := 3.1761 + 1021.3286 * Tsto;
L3 := 1.7535 + 628.3076 * Tsto;
L4 := 6.2035 + 334.0612 * Tsto;
L5 := 0.5995 + 52.9691 * Tsto;
A02 := 1.000001;
L02 := 1.7534703 + 628.3075849000001 * Tsto - 0.0000001 * sqrt(Tsto);
K02 := -0.0037408 - 8.229999999999999e-05 * Tsto + 0.0000003 * sqrt(Tsto);
H02 := 0.0162845 - 0.000062 * Tsto - 0.0000003 * sqrt(Tsto);
Q02 := -0.0001135 * Tsto;
P02 := 0.0000102 * Tsto;
DELA2 := (112 * cos(2 * L3 - 2 * L5)) / 1.0e+07;
DELL2 := -97 * sin(4 * L3 - 8 * L4 + 3 * L5) + 322 * cos(4 * L3 - 8 * L4 + 3 * L5);
DELL2 := DELL2 + 109 * cos(2 * L2 - 3 * L3) - 125 * sin(L5) - 206 * sin(2 * L3 - 2 * L5);
DELL2 := DELL2 + 166 * sin(L2 - L3);
DELL2 := DELL2 + 127 * sin(2 * L2 - 2 * L3);
DELL2 := DELL2 / 1.0e+07;
DELK2 := (-199 * cos(2 * L2 - 3 * L3) + 186 * cos(L3 - 2 * L5) - 150 * cos(L5)) / 1.0e+07;
DELH2 := (199 * sin(2 * L2 - 3 * L3) - 186 * sin(L3 - 2 * L5) - 151 * sin(L5)) / 1.0e+07;
A2s1 := A02 + DELA2;
L2 := L02 + DELL2;
L2 := L2 + 0.000031 * sin(5.19847 + 7771.4 * Tsto);
L2 := L2 - 9.933999999999999e-05 / A2s1;
K2 := K02 + DELK2;
H2 := H02 + DELH2;
Q2 := Q02;
P2 := P02;
EX2 := sqrt(sqrt(K2) + sqrt(H2));
O2 := arcsin(H2/EX2);
DIF := cos(O2) - K2 / EX2;
if abs(DIF) >= 0.00001 then O2 := pi - O2;
II2 := 2 * arcsin(sqrt(sqrt(Q2) + sqrt(P2)));
OM2 := arctan(P2 / Q2);
MM2 := L2 - O2;
E2 := MM2 + EX2 * sin(MM2);
E2 := MM2 + EX2 * sin(E2);
E2 := MM2 + EX2 * sin(E2);
E2 := MM2 + EX2 * sin(E2);
E2 := MM2 + EX2 * sin(E2);
E2 := MM2 + EX2 * sin(E2);
E2 := MM2 + EX2 * sin(E2);
E2 := E2 - trunc(E2 / 2 / pi) * 2 * pi;
V2 := 2 * arctan(sqrt((1 + EX2)/(1 - EX2)) * tan(E2 / 2));
R2s1 := A2s1 * (1 - sqrt(EX2)) / (1 + EX2 * cos(V2));
R2s1 := R2s1 + 0.000031 * cos(5.19847 + 7771.4 * Tsto);
R2s1 := R2s1 * AU;
U := O2 + V2 - OM2;
Xek2 := -R2s1 * (cos(OM2) * cos(U) - sin(OM2) * sin(U) * cos(II2)); //ZMENA
Yek2 := -R2s1 * (sin(OM2) * cos(U) + cos(OM2) * sin(U) * cos(II2)); //ZMENA
Zek2 := -R2s1 * sin(U) * sin(II2); //ZMENA
LA := arcsin(Yek2 / (sqrt(sqrt(Xek2) + sqrt(Yek2))));
DIF := cos(LA) - Xek2 / (sqrt(sqrt(Xek2) + sqrt(Yek2)));
if abs(DIF) >= 0.00001 then LA := pi - LA;
LA := LA + (50.29097 + 0.02222 * Trok) / 3600 * ro1 * Tsto * 100;
LAM := LA * ro;
if LA <= 0 then begin
    LA := 2 * pi + LA;
    LAM := 360 + LAM
end;
X2 := Xek2;
Y2 := Yek2 * cos(eps) - Zek2 * sin(eps);
Z2 := Yek2 * sin(eps) + Zek2 * cos(eps);
AL := arcsin(Y2 / sqrt(sqrt(X2) + sqrt(Y2)));
DIF := cos(AL) - X2 / sqrt(sqrt(X2) + sqrt(Y2));
if abs(DIF) >= 0.00001 then AL := pi - AL;
DE := arctan(Z2 / sqrt(sqrt(X2) + sqrt(Y2)));
MM := (46.12436 + 0.02793 * Trok) / 3600 * pi / 180;
MN := (20.04311 - 0.00853 * Trok) / 3600 * pi / 180;
VM := MM * Tsto * 100;

```



```

VN := MN * Tsto * 100;
dAL := VM + VN * sin(AL) * tan(DE);
dDE := VN * cos(AL);
AL := AL + dAL;
DE := DE + dDE;
XS := R2sl * cos(DE) * cos(AL);
YS := R2sl * cos(DE) * sin(AL);
ZS := R2sl * sin(DE);
Rslunce := sqrt(sqr(XS) + sqr(YS) + sqr(ZS));
//RQS := sqrt(sqr(X - XS) + sqr(Y - YS) + sqr(Z - ZS));

// poruchove zrychleni od MESICE
RQm := sqrt(sqr(X - Xlm) + sqr(Y - Ylm) + sqr(Z - Zlm));
Fmesic[1] := Gmm * ((Xlm - X) / Power(RQm,3) - Xlm / Power(RR1,3));
Fmesic[2] := Gmm * ((Ylm - Y) / Power(RQm,3) - Ylm / Power(RR1,3));
Fmesic[3] := Gmm * ((Zlm - Z) / Power(RQm,3) - Zlm / Power(RR1,3));

// poruchove zrychleni od SLUNCE
RQs := sqrt(sqr(X - XS) + sqr(Y - YS) + sqr(Z - ZS));
Fslunce[1] := Gms * ((XS - X) / Power(RQs,3) - XS / Power(R2sl,3));
Fslunce[2] := Gms * ((YS - Y) / Power(RQs,3) - YS / Power(R2sl,3));
Fslunce[3] := Gms * ((ZS - Z) / Power(RQs,3) - ZS / Power(R2sl,3));

// soucet poruch
FMeSlu[1] := Fslunce[1] + Fmesic[1];
FMeSlu[2] := Fslunce[2] + Fmesic[2];
FMeSlu[3] := Fslunce[3] + Fmesic[3];
end;

procedure TForm1.RungeKutta(x,y,z,dx,dy,dz : extended; h : extended; n : integer; FileName :
string);
{*****
* elementy ..... drah. elementy *
* h ..... delka jednoho kroku *
* n ..... lelkem kroku *
* FileName ..... jmeno vystupniho souboru *
*****}
var k1, k2, k3, k4 : array [1..6] of extended;
    r, t, thod : extended;
    k, i : integer;
    fw : TextFile;

begin

thod := 0;
t := thod * 3600;

AssignFile(fw, FileName);
Rewrite(fw);

Writeln(fw, '0');
WriteLn(fw, thod:17:13);

Write(fw, x:0:8); Write(fw, y:0:8); WriteLn(fw, z:0:8);
Write(fw, dx:0:10); Write(fw, dy:0:10); WriteLn(fw, dz:0:10);

for k := 1 to 6 do begin
    k1[k] := 0;
    k2[k] := 0;
    k3[k] := 0;
    k4[k] := 0;
end;
r := 0;

for i := 1 to n do begin

    r := sqrt(sqr(x) + sqr(y) + sqr(z));

    if ChBZeme.Checked = TRUE then VlivZeme(x, y, z, thod, 0, 0, strad)
    else begin
        FZem[1] := 0; FZem[2] := 0; FZem[3] := 0;
    end;
end;

```

```

if ChBMeSlu.Checked = TRUE then VlivMesicSlunce(x, y, z, thod)
else begin
    FMeSlu[1] := 0; FMeSlu[2] := 0; FMeSlu[3] := 0
    end;

    k1[1] := dx;
    k1[2] := dy;
    k1[3] := dz;
    k1[4] := -GM * x / (Power(r, 3)) + FZem[1] + FMeSlu[1];
    k1[5] := -GM * y / (Power(r, 3)) + FZem[2] + FMeSlu[2];
    k1[6] := -GM * z / (Power(r, 3)) + FZem[3] + FMeSlu[3];

    r := sqrt(sqrt(x + (h/2) * k1[1]) + sqrt(y + (h/2) * k1[2]) + sqrt(z + (h/2) * k1[3]));

    if ChBZeme.Checked = TRUE then VlivZeme(x + (h/2) * k1[1], y + (h/2) * k1[2], z + (h/2) *
k1[3], thod, 0, 0, strad)
    else begin
        FZem[1] := 0; FZem[2] := 0; FZem[3] := 0;
        end;
    if ChBMeSlu.Checked = TRUE then VlivMesicSlunce(x + (h/2) * k1[1], y + (h/2) * k1[2], z +
(h/2) * k1[3], thod)
    else begin
        FMeSlu[1] := 0; FMeSlu[2] := 0; FMeSlu[3] := 0
        end;

        k2[1] := dx + (h/2) * k1[4];
        k2[2] := dy + (h/2) * k1[5];
        k2[3] := dz + (h/2) * k1[6];
        k2[4] := -GM * (x + (h/2) * k1[1]) / (Power(r, 3)) + FZem[1] + FMeSlu[1];
        k2[5] := -GM * (y + (h/2) * k1[2]) / (Power(r, 3)) + FZem[2] + FMeSlu[2];
        k2[6] := -GM * (z + (h/2) * k1[3]) / (Power(r, 3)) + FZem[3] + FMeSlu[3];

        r := sqrt(sqrt(x + (h/2) * k2[1]) + sqrt(y + (h/2) * k2[2]) + sqrt(z + (h/2) * k2[3]));

        if ChBZeme.Checked = TRUE then VlivZeme(x + (h/2) * k2[1], y + (h/2) * k2[2], z + (h/2) *
k2[3], thod, 0, 0, strad)
        else begin
            FZem[1] := 0; FZem[2] := 0; FZem[3] := 0;
            end;
        if ChBMeSlu.Checked = TRUE then VlivMesicSlunce(x + (h/2) * k2[1], y + (h/2) * k2[2], z +
(h/2) * k2[3], thod)
        else begin
            FMeSlu[1] := 0; FMeSlu[2] := 0; FMeSlu[3] := 0
            end;

            k3[1] := dx + (h/2) * k2[4];
            k3[2] := dy + (h/2) * k2[5];
            k3[3] := dz + (h/2) * k2[6];
            k3[4] := -GM * (x + (h/2) * k2[1]) / (Power(r, 3)) + FZem[1] + FMeSlu[1];
            k3[5] := -GM * (y + (h/2) * k2[2]) / (Power(r, 3)) + FZem[2] + FMeSlu[2];
            k3[6] := -GM * (z + (h/2) * k2[3]) / (Power(r, 3)) + FZem[3] + FMeSlu[3];

            r := sqrt(sqrt(x + h * k3[1]) + sqrt(y + h * k3[2]) + sqrt(z + h * k3[3]));

            if ChBZeme.Checked = TRUE then VlivZeme(x + h * k3[1], y + h * k3[2], z + h * k3[3], thod,
0, 0, strad)
            else begin
                FZem[1] := 0; FZem[2] := 0; FZem[3] := 0;
                end;
            if ChBMeSlu.Checked = TRUE then VlivMesicSlunce(x + h * k3[1], y + h * k3[2], z + h *
k3[3], thod)
            else begin
                FMeSlu[1] := 0; FMeSlu[2] := 0; FMeSlu[3] := 0
                end;

                k4[1] := dx + h * k3[4];
                k4[2] := dy + h * k3[5];
                k4[3] := dz + h * k3[6];
                k4[4] := -GM * (x + h * k3[1]) / (Power(r, 3)) + FZem[1] + FMeSlu[1];
                k4[5] := -GM * (y + h * k3[2]) / (Power(r, 3)) + FZem[2] + FMeSlu[2];
                k4[6] := -GM * (z + h * k3[3]) / (Power(r, 3)) + FZem[3] + FMeSlu[3];

                x := x + (h * (k1[1] + 2 * k2[1] + 2 * k3[1] + k4[1])) / 6;
                y := y + (h * (k1[2] + 2 * k2[2] + 2 * k3[2] + k4[2])) / 6;

```

```

z := z + (h * (k1[3] + 2 * k2[3] + 2 * k3[3] + k4[3])) / 6;
dx := dx + (h * (k1[4] + 2 * k2[4] + 2 * k3[4] + k4[4])) / 6;
dy := dy + (h * (k1[5] + 2 * k2[5] + 2 * k3[5] + k4[5])) / 6;
dz := dz + (h * (k1[6] + 2 * k2[6] + 2 * k3[6] + k4[6])) / 6;

t := t + h;
thod := (t / 3600);
Gauge.Progress := round(100*i/n);
if abs((i / cvypis) - round(i / cvypis)) < 0.00001 then begin

// vypis drahovych elementu do souboru
  Writeln(fw, i);
  WriteLn(fw, thod:17:13);
  Write(fw, x:0:6); Write(fw, y:0:6); WriteLn(fw, z:0:6);
  Write(fw, dx:0:10); Write(fw, dy:0:10); WriteLn(fw, dz:0:10);

  end;
end;
CloseFile(fw);
end;

procedure TForm1.BtnBrowse1Click(Sender: TObject);
begin
  OpnDlgXYEl.Execute;
  EdCtiSoubor.Text := OpnDlgXYEl.FileName;
end;

procedure TForm1.BtnNactiClick(Sender: TObject);
begin

// nacteni drahovych elementu ze vstupniho souboru
  AssignFile(f, EdCtiSoubor.Text);
  Reset(f);
  Readln(f, pom.X); EdX.Text := FloatToStr(pom.X);
  Readln(f, pom.Y); EdY.Text := FloatToStr(pom.Y);
  Readln(f, pom.Z); EdZ.Text := FloatToStr(pom.Z);
  Readln(f, pom.dX); EddX.Text := FloatToStr(pom.dX);
  Readln(f, pom.dY); EddY.Text := FloatToStr(pom.dY);
  Readln(f, pom.dZ); EddZ.Text := FloatToStr(pom.dZ);
  Readln(f, rev); rev := 3600*rev; EdOtoc.Text := FloatToStr(rev);
  CloseFile(f);
end;

procedure TForm1.BtnBrowse2Click(Sender: TObject);
begin
  Savedlg.Execute;
  EdVystup.Text := SaveDlg.FileName;
end;

procedure TForm1.BtnVypocetClick(Sender: TObject);
var X00, Y00, Z00, dx00, dy00, dz00 : extended;

begin

X00 := StrToFloat(EdX.Text);
Y00 := StrToFloat(EdY.Text);
Z00 := StrToFloat(EdZ.Text);
dx00 := StrToFloat(EddX.Text);
dy00 := StrToFloat(EddY.Text);
dz00 := StrToFloat(EddZ.Text);
  Gauge.Progress := 0;
  AssignFile(f, EdVystup.Text);
  if RBtnA.Checked = TRUE then begin
    rev := StrToFloat(EdOtoc.Text);
    h := rev / kro;
    n := round(kro) * StrToInt(EdPocet.Text);
  end else begin
    h := StrToFloat(EdDelka.Text);
    n := StrToInt(EdPocKrok.Text);
  end;

// ma-li se pocitat vliv Zeme, nactou se Stokesovy koeficienty
  if ChBZeme.Checked = TRUE then begin
    AssignFile(fr, 'neno_egm.txt');
    Reset(fr);
    i := 0;

```

```

while i <= SpEdStrad.Value do begin
  readln(fr, i, k, pomCC, pomSS);
  CC[i,k] := pomCC;
  SS[i,k] := pomSS;
end;
end;

// nektere parametry jsou treba pouze pro pocitani
// vlivu Zeme ci Mesice a Slunce:
if ChBZeme.Checked = TRUE then begin
  strad := SpEdstrad.Value;
  JDO := StrToFloat(EdJDO.Text)
end else begin
  if ChBMeSlu.Checked = TRUE then
    JDO := StrToFloat(EdJDO.Text);
  end;

  cvypis := SpEd1.Value; // po kolika krocich se maji vysledky zapisovat do souboru
  RungeKutta(X00, Y00, Z00, dX00, dY00, dZ00, h, n, EdVystup.Text);
end;

procedure TForm1.EdKrokyChange(Sender: TObject);
begin
  if (EdKroky.Text <> '') then
    kro := StrToFloat(EdKroky.Text);
end;

procedure TForm1.EdPocetChange(Sender: TObject);
begin
  if (EdPocet.Text <> '') then
    poc := StrToInt(EdPocet.Text);
end;

procedure TForm1.RBtnAClick(Sender: TObject);
begin
  EdKroky.Enabled := NOT EdKroky.Enabled;
  EdPocet.Enabled := NOT EdPocet.Enabled;
  EdDelka.Enabled := NOT EdDelka.Enabled;
  EdPocKrok.Enabled := NOT EdPocKrok.Enabled;
end;

procedure TForm1.RBtnBClick(Sender: TObject);
begin
  EdKroky.Enabled := NOT EdKroky.Enabled;
  EdPocet.Enabled := NOT EdPocet.Enabled;
  EdDelka.Enabled := NOT EdDelka.Enabled;
  EdPocKrok.Enabled := NOT EdPocKrok.Enabled;
end;

end.

```

### A3.3 vyrovnani.dpr

```

program Vyrovnani;

uses
  Forms,
  Un_MNC in 'Un_MNC.pas' {Form1};

{$R *.res}

begin
  Application.Initialize;
  Application.CreateForm(TForm1, Form1);
  Application.Run;
end.

```

### A3.4 Un\_MNC.pas

```

unit Un_MNC;

interface

uses
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,
  Dialogs, StdCtrls, Math, Spin;

```

```

type
  TForm1 = class(TForm)
    EdEl: TEdit;
    EdObs: TEdit;
    EdVyp: TEdit;
    Label1: TLabel;
    Label2: TLabel;
    Label3: TLabel;
    BtnProchEl: TButton;
    BtnProchObs: TButton;
    BtnProchVyp: TButton;
    BtnVypocet: TButton;
    Label4: TLabel;
    EdVyr: TEdit;
    BtnProchVyr: TButton;
    OpnDlgEl: TOpenDialog;
    OpnDlgObs: TOpenDialog;
    OpnDlgVyp: TOpenDialog;
    SvDlgVyr: TSaveDialog;
    SpEGRadku: TSpinEdit;
    Label5: TLabel;
    EdProt: TEdit;
    BtnProchProt: TButton;
    SvDlgProt: TSaveDialog;
    Label6: TLabel;
    procedure BtnProchElClick(Sender: TObject);
    procedure BtnProchObsClick(Sender: TObject);
    procedure BtnProchVypClick(Sender: TObject);
    procedure BtnProchVyrClick(Sender: TObject);
    procedure BtnVypocetClick(Sender: TObject);
    procedure BtnProchProtClick(Sender: TObject);
  private
    { Private declarations }
  public
    { Public declarations }
  end;

const ro1 = pi / 180;
      ro = 180 / pi;
      GM = 3.986004418e+14; // geocentricka gravitacni konstanta
      eps = 10e-1000;

var
  Form1: TForm1;
  NNp, S, C : array [1..6] of extended;
  GA, K : array[1..6,1..6] of extended;
  X0, Y0, Z0, dX0, dY0, dZ0, rev, TA : extended;
  M0, M, difN : extended;

implementation
  {$R *.dfm}

procedure TForm1.BtnProchElClick(Sender: TObject);
begin
  OpnDlgEl.Execute;
  EdEl.Text := OpnDlgEl.FileName;
end;

procedure TForm1.BtnProchObsClick(Sender: TObject);
begin
  OpnDlgObs.Execute;
  EdObs.Text := OpnDlgObs.FileName;
end;

procedure TForm1.BtnProchVypClick(Sender: TObject);
begin
  OpnDlgVyp.Execute;
  EdVyp.Text := OpnDlgVyp.FileName;
end;

procedure TForm1.BtnProchVyrClick(Sender: TObject);
begin
  SvDlgVyr.Execute;
  EdVyr.Text := SvDlgVyr.FileName;
end;

```

```

procedure TForm1.BtnProchProtClick(Sender: TObject);
begin
  SvDlgProt.Execute;
  EdProt.Text := SvDlgProt.FileName;
end;

procedure TForm1.BtnVypocetClick(Sender: TObject);

var X0, Y0, Z0, dx0, dy0, dz0, rev, TA : extended;
    XVy, YVy, ZVy, dxVy, dyVy, dzVy : array [1..1000] of extended;
    XOb, YOb, ZOb : array [1..1000] of extended;
    TAp, V : array [1..1000] of extended;
    ROA, VOA, ROROA, W, Aosa, Xp, J: array [1..6] of extended;
    L : array [1..1000] of extended;
    R0, V0, ROR0, A7, A8, Ecos, Esin, EXCE, Eco, Esi, alfa : extended;
    c1, c2, dif, Eo, WW : extended;
    TApom, XVypom, YVypom, ZVypom, dxVypom, dyVypom, dzVypom, XObpom, YObpom, ZObpom :
extended;
    LX, LY, LZ : extended;
    EmEol, T0, EmEo, EE, RRR, VELf, VELg, veldF, veldG : extended;
    XC, YC, ZC, dXC, dYC, dZC : extended;
    U, F, G, Z : array [1..6] of extended;
    H : array [1..1000, 1..6] of extended;

    NN, XX, X, n : integer;
    A, Mp: array [1..6] of integer;
    bg, hd, D : extended;

    frEl, frObs, frVyp, fr : TextFile;
    fwVyr, fwProt : TextFile;
    i, je, jej, ka : integer;
    pom0, pom1, pom2, G2 : array [1..6] of extended;

Label 5600;
Label 5820;
Label 5510;

begin
  XX := 6;
  n := SpEdRadku.Value;
  NN := 3*n;
  // nacteni drahovych elementu
  AssignFile(frEl, EdEl.Text);
  Reset(frEl);
  Readln(frEl, X0); Readln(frEl, Y0); Readln(frEl, Z0);
  Readln(frEl, dx0); Readln(frEl, dy0); Readln(frEl, dz0);
  Readln(frEl, rev);
  CloseFile(frEl);

  // pripava vypoctu parc. der., a to jen pomoci
  // pravouhlych drahovych elementu pro cas T0

  R0 := sqrt((sqr(X0)+sqr(Y0)+sqr(Z0)));
  V0 := sqrt((sqr(dx0)+sqr(dy0)+sqr(dz0)));
  ROR0 := X0 * dx0 + Y0 * dy0 + Z0 * dz0;
  A7 := GM * Power((2 * GM / R0 - sqr(V0)), -1);
  A8 := sqrt(GM / Power(A7, 3));
  Ecos := 1 - r0/A7;
  Esin := (ROR0 / GM) * sqrt((2 * GM / R0) - sqr(V0));
  EXCE := sqrt((sqr(Esin) + sqr(Ecos)));
  Eco := Ecos / EXCE;
  Esi := Esin / EXCE;
  alfa := arcsin(Esi);
  c1 := cos(alfa);
  c2 := Eco;
  dif := c1 - c2;
  if abs(dif) > 0.00001 then alfa := pi - alfa;
  Eo := alfa;
  WW := 2 * GM / R0 - sqr(V0);

  // postupny vypocet parcialnich derivaci pro X, Y, Z jednotlivych
  // poloh MIMOSY z mereni GPS na palube UDZ

  ROA[1] := X0 / R0; ROA[2] := Y0 / R0; ROA[3] := Z0 / R0;
  ROA[4] := 0; ROA[5] := 0; ROA[6] := 0;
  VOA[1] := 0; VOA[2] := 0; VOA[3] := 0;

```

```

VOA[4] := dx0 / V0; VOA[5] := dy0 / V0; VOA[6] := dz0 / V0;
ROROA[1] := dx0; ROROA[2] := dy0; ROROA[3] := dz0;
ROROA[4] := X0; ROROA[5] := Y0; ROROA[6] := Z0;

for i := 1 to 6 do begin
  W[i] := -2 * GM * Power(R0, -2) * R0A[i] - 2 * V0 * VOA[i];
  Aosa[i] := -GM * Power(WW, -2) * W[i];
  NNP[i] := 3 / 2 * sqrt(WW) / GM * W[i];
  C[i] := Power(-A7, -1) * R0A[i] + R0 * Power(A7, -2) * Aosa[i];
  S[i] := Power(GM, -1) * sqrt(WW) * ROROA[i] + 0.5 * ROR0 / GM * Power(WW, -0.5) * W[i];
end;

// dale vypocet absolutnich clenu

AssignFile(frVyp, EdVyp.Text);
AssignFile(frObs, EdObs.Text);
Reset(frObs);
Readln(frObs, T0);
CloseFile(frObs);
Reset(frVyp);
Reset(frObs);
// nacteni observovanych (GPS) a vypoctenych souradnic
for i := 1 to n do begin
  Readln(frVyp);
  Readln(frVyp);
  Readln(frVyp, XVypom, YVypom, ZVypom);
  Readln(frVyp, dXVypom, dYVypom, dZVypom);
  Readln(frObs, TApom, XObpom, YObpom, ZObpom);

  TAp[i] := TApom; TAp[n+i] := TApom; TAp[2*n+i] := TApom;
  XVy[i] := XVypom; YVy[i+i] := YVypom; ZVy[2*n+i] := ZVypom;
  XOb[i] := XObpom; YOb[n+i] := YObpom; ZOb[2*n+i] := ZObpom;

  LX := XVypom - XObpom; LY := YVypom - YObpom; LZ := ZVypom - ZObpom;

  L[i] := LX; L[n+i] := LY; L[2*n+i] := LZ;

  EmEol := A8 * (TApom - T0) * 3600;
  EmEo := 0;
  for jej := 1 to 18 do begin
    EmEo := EmEol + sin(EmEo) * Ecos + (cos(EmEo)-1) * Esin;
  end;
  EE := EmEo + Eo;

  RRR := R0 + A7 * (Ecos - EXCE * cos(EE));
  VELf := 1 - 2 * (A7 / R0) * sqr(sin(0.5 * EmEo));
  VELg := Power(A8, -1) * (sin(EmEo) - EmEo) + (TApom - T0) * 3600;

// vypocet souradnic pro cas TA
XC := VELf * X0 + VELg * DX0;
YC := VELf * Y0 + VELg * DY0;
ZC := VELf * Z0 + VELg * DZ0;

je := 0;
for je := 1 to 6 do begin
  U[je] := A7 / RRR * ((TApom - T0) * 3600 * NNP[je] + sin(EmEo) * C[je] + (cos(EmEo) - 1) * S[je]);
  F[je] := (VELf - 1) * A7 / R0 * C[je] - A7 / R0 * sin(EmEo) * (A7 / RRR * ((TApom - T0) * 3600 * NNP[je] + sin(EmEo) * C[je] + (cos(EmEo) - 1) * S[je]));
  G[je] := -Power(A8, -2) * NNP[je] * (sin(EmEo) - EmEo) + Power(A8, -1) * (cos(EmEo) - 1) * U[je];
end;
// parcialni souradnice (xi, yi, zi) podle (x0, y0, z0, dx0, dz0, dy0)
// derivace X podle elementu
H[i, 1] := F[1] * X0 + G[1] * dx0 + VELf;
H[i, 2] := F[2] * X0 + G[2] * dx0;
H[i, 3] := F[3] * X0 + G[3] * dx0;
H[i, 4] := F[4] * X0 + G[4] * dx0 + VELg;
H[i, 5] := F[5] * X0 + G[5] * dx0;
H[i, 6] := F[6] * X0 + G[6] * dx0;
// derivace Y podle elementu
H[n + i, 1] := F[1] * Y0 + G[1] * dy0;
H[n + i, 2] := F[2] * Y0 + G[2] * dy0 + VELf;
H[n + i, 3] := F[3] * Y0 + G[3] * dy0;
H[n + i, 4] := F[4] * Y0 + G[4] * dy0;
H[n + i, 5] := F[5] * Y0 + G[5] * dy0 + VELg;
H[n + i, 6] := F[6] * Y0 + G[6] * dy0;

```

```

// derivace Z podle elementu
H[2 * n + i, 1] := F[1] * Z0 + G[1] * dZ0;
H[2 * n + i, 2] := F[2] * Z0 + G[2] * dZ0;
H[2 * n + i, 3] := F[3] * Z0 + G[3] * dZ0 + VELf;
H[2 * n + i, 4] := F[4] * Z0 + G[4] * dZ0;
H[2 * n + i, 5] := F[5] * Z0 + G[5] * dZ0;
H[2 * n + i, 6] := F[6] * Z0 + G[6] * dZ0 + VELg;

end;      // for i := ...

CloseFile(frVyp);
CloseFile(frObs);

//-----
//-----VYROVNANI-----
//-----

//
for i := 1 to XX do begin
  for je := 1 to XX do begin
    GA[i, je] := 0;
    for ka := 1 to 3 * n do begin
      GA[i, je] := GA[i, je] + H[ka, i] * H[ka, je];
    end; // for ka
  end; //for je
end; // for i

//-----inverze-----
X := XX;
D := 1;
for ka := 1 to X do begin
  A[ka] := ka;
  Mp[ka] := ka;
  bg := GA[ka, ka];
  for je := ka to X do begin
    for i := ka to X do begin
      if abs(bg) - abs(GA[i, je]) < 0 then begin
        bg := GA[i, je];
        A[ka] := i;
        Mp[ka] := je;
      end; //if
    end; // for i
  end; // for je
  je := A[ka];
  if je - ka > 0 then begin
    for i := 1 to X do begin
      hd := -GA[ka, i];
      GA[ka, i] := GA[je, i];
      GA[je, i] := hd;
    end; // for i
  end; // if
  i := Mp[ka];
  if i - ka > 0 then begin
    for jej := 1 to X do begin
      hd := -GA[jej, ka];
      GA[jej, ka] := GA[jej, i];
      GA[jej, i] := hd;
    end; // for jej
  end; // if i
  if abs(bg) < eps then begin
    D := 0;
    goto 5820;
  end;
  for i := 1 to X do begin
    if i - ka <> 0 then GA[i, ka] := -GA[i, ka] / bg;
  end;
  for i := 1 to X do begin
    hd := GA[i, ka];
    if i - ka <> 0 then begin
      for je := 1 to X do begin
        if je - ka <> 0 then GA[i, je] := hd * GA[ka, je] + GA[i, je];
      end;
    end;
  end;
  for je := 1 to X do begin
    if je - ka <> 0 then GA[ka, je] := GA[ka, je] / bg;
  end;
end;

```



```

    D := D * bg;
    GA[ka,ka] := 1 / bg;
end; // for ka

ka := X;
// sem je to OK
5600:
ka := ka - 1;
if ka <= 0 then goto 5820;
i := A[ka];
if i - ka > 0 then begin
    for je := 1 to X do begin
        hd := GA[je,ka];
        GA[je,ka] := -GA[je,i];
        GA[je,i] := hd;
    end; // for je
end; // if
je := Mp[ka];
if je - ka <= 0 then goto 5600;
for i := 1 to X do begin;
    hd := GA[ka,i];
    GA[ka,i] := -GA[je,i];
    GA[je,i] := hd;
end; // for i
goto 5600;
5820:

XX := X;

//-----konec inverze-----

// vypocet absolutnich clenu normalnich rovnic
for i := 1 to XX do begin
    J[i] := 0;
    for ka := 1 to NN do begin
        J[i] := J[i] + H[ka,i] * L[ka];
    end;
end;
// vypocet neznamych
for i := 1 to XX do begin
    Xp[i] := 0;
    for ka := 1 to XX do begin
        Xp[i] := Xp[i] - GA[i,ka] * J[ka];
    end;
end;

// vypocet nahodnych oprav
for i := 1 to NN do begin
    V[i] := 0;
    for ka := 1 to XX do begin
        V[i] := V[i] + H[i,ka] * Xp[ka];
    end;
    V[i] := V[i] + L[i];
end;
M0 := 0;
for i := 1 to NN do begin
    M0 := M0 + V[i] * V[i];
end;

// stredni jednotkova chyba
M := sqrt(M0 / (1 + NN - difN - XX));

// stredni chyby neznamych
for i := 1 to XX do begin
    Z[i] := M * (sqrt(abs(GA[i,i])));
end;
for i := 1 to XX do begin
    for je := i to XX do begin
        K[i,je] := GA[i,je] / sqrt(abs(GA[i,i]*GA[je,je]));
    end;
end;

//vypis do souboru
AssignFile(fwVyr, EdVyr.Text);
Rewrite(fwVyr);

```

```

    Writeln(fwVyr, X0 + Xp[1]:0:17); Writeln(fwVyr, Y0 + Xp[2]:0:17); Writeln(fwVyr, Z0 +
Xp[3]:0:17);
    Writeln(fwVyr, dX0 + Xp[4]:0:17); Writeln(fwVyr, dY0 + Xp[5]:0:17); Writeln(fwVyr, dZ0 +
Xp[6]:0:17);
    CloseFile(fwVyr);

AssignFile(fwProt, EdProt.Text);
Rewrite(fwProt);
    Writeln(fwProt, 'Opravy v[i]');
    for i := 1 to NN do Writeln(fwProt, 'v[' ,i, ']: ',V[i]:0:17);
    Writeln(fwProt);
    Writeln(fwProt, 'Stredni jednotkova chyba');
    Writeln(fwProt, 'M0 = ',M:0:17);
    Writeln(fwProt);
    Writeln(fwProt, 'stredni chyby neznamych:');
    Writeln(fwProt, Z[1]:0:17); Writeln(fwProt, Z[2]:0:17); Writeln(fwProt, Z[3]:0:17);
    Writeln(fwProt, Z[4]:0:17); Writeln(fwProt, Z[5]:0:17); Writeln(fwProt, Z[6]:0:17);
    CloseFile(fwProt);

end;

end.

```

## **A4 Obsah CD**

CD, které je součástí této diplomové práce obsahuje tyto adresáře:

- **programy** – obsahuje soubory integr.exe a vyrovnani.exe včetně jejich zdrojových kódů
- **soubory** – obsahuje ukázky vstupních a výstupních souborů, se kterými výše uvedené programy pracují
- **text** – obsahuje text této diplomové práce ve formátu pdf