

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
KATEDRA MATEMATIKY

Porovnání různých způsobů vyrovnání
v geodetické praxi

Martin Kadlec

Plzeň 2005

Prohlášení

Předkládám tímto k posouzení a následné obhajobě diplomovou práci zpracovanou na závěr studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracoval samostatně pouze s použitím zdrojů, jejichž úplný seznam je její součástí, a za odborného vedení vedoucího diplomové práce.

Plzeň, květen 2005

.....

vlastnoruční podpis

Poděkování

Na tomto místě chci poděkovat vedoucímu mé diplomové práce, Prof. Ing. Josefu Kabeláčovi, CSc., a to zejména za motivaci a podnětné nápady tolik nezbytné pro zpracování této práce.

Za motivaci a za přínosný „matematický“ pohled na problematiku vyrovnání chci poděkovat i Prof. RNDr. Stanislavu Míkovi, CSc.

Za naměřená data, na kterých byly teoretické metody testovány, pak patří dík i mnoha studentům oboru geomatika, z nichž mnozí jsou mými přáteli.

Anotace

Práce se zabývá některými aspekty vyrovnání geodetických měření metodou nejmenších čtverců, zejména s ohledem na možnost aplikace při vyrovnání rozsáhlejších plošných sítí.

V teoretické části jsou stručně nastíněny některé potřebné vztahy z matematické statistiky. Následují teoretické kapitoly popisující vyrovnání zprostředkujících měření metodou nejmenších čtverců, je-li měřeno více druhů různých veličin (vyrovnání pro více druhů oprav), otázka volného vyrovnání, a dva způsoby umožňující zefektivnění výpočtu vyrovnání ve speciálních případech – vyrovnání v blocích a postupné vyrovnání.

Pro testování teoretických výsledků byl sestaven program v prostředí Matlab, který slouží k vyrovnání plošné sítě.

Jako testovací data byla použita plošná síť bodů zhušťující základní polohové bodové pole v okolí Nečtin v Plzeňském kraji. Tato síť byla zaměřena studenty oboru geomatika v průběhu let 2000-2003.

Klíčová slova

Metoda nejmenších čtverců, plošná síť, volné vyrovnání, postupné vyrovnání, vyrovnání v blocích, Matlab.

Annotation

This work deals with adjustment of surveying using least squares method, with aspect at possibility for larger network adjustment.

In the theoretical part are some parts of statistics. Then chapters about adjustment using least squares method for observations of different quantities (and different residuals), chapter about free adjustment, adjustment in blocks and continuous adjustment.

For test purpose was made a program for network adjustment in Matlab.

For testing was used network nearby Nečtiny in west Bohemian. This network was surveyed by students of Geomatics in years 2000 – 2003.

Key words

least squares, plane network, free adjustment, continuous adjustment, adjustment in blocks, Matlab.

Obsah

OBSAH	5
ÚVOD	8
1 VYBRANÉ POJMY ZE STATISTIKY A NÁSTIN TESTOVÁNÍ VÝSLEDKŮ VYROVNÁNÍ	9
1.1 ZÁKLADNÍ STATISTICKÉ POJMY	9
1.2 PRINCIP MNČ	10
1.3 VÁHY MĚŘENÍ.....	11
1.4 TESTOVÁNÍ VELIKOSTI SKUTEČNÝCH CHYB	12
1.5 POMĚR APRIORNÍ A APOSTERIORNÍ STŘEDNÍ CHYBY	12
1.6 ZKOUŠKY NORMALITY	13
1.6.1 Zkouška normality pomocí empirických momentů	13
1.6.2 Zkouška empirické střední hodnoty.....	14
1.6.3 Zkouška koeficientu šikmosti (asymetrie).....	14
1.6.4 Zkouška koeficientu špičatosti (excesu).....	14
1.6.5 Další testy.....	15
2 ZPROSTŘEDKUJÍCÍ VYROVNÁNÍ PRO DVA I VÍCE DRUHŮ OPRAV	16
2.1 ZAVEDENÍ VAH MĚŘENÍ	16
2.2 ZOBECNĚNÍ VYROVNÁNÍ ZPROSTŘEDKUJÍCÍCH POZOROVÁNÍ.....	17
2.2.1 Teoretický základ zobecnění.....	17
2.2.2 Poznámka k zavedení zprostředkujících parametrů	19
2.2.3 Vyrovnání pro 1 druh oprav.....	19
2.2.4 Vyrovnání pro více druhů oprav	20
2.2.5 Výpočet vah zprostředkujících parametrů.....	22
2.2.6 Výpočet oprav	24
2.2.7 Výpočet posteriorních středních chyb	24
3 VOLNÉ VYROVNÁNÍ	25
3.1 VOLNÉ VYROVNÁNÍ ZPROSTŘEDKUJÍCÍCH MĚŘENÍ.....	25
3.2 VOLNÉ VYROVNÁNÍ ZPROSTŘEDKUJÍCÍCH SPOLU S PODMÍNKAMI	26
3.3 VOLNÉ VYROVNÁNÍ PRO ÚČELY PLOŠNÉ SÍTĚ.....	26
4 VYROVNÁNÍ V BLOCÍCH	28
4.1 PRINCIP VYROVNÁNÍ V BLOCÍCH	28
4.2 TVAR MATICE P	28
4.3 TVAR MATICE $A^T P A$	29

4.4	ŘEŠENÍ VYROVNÁNÍ V BLOCÍCH	30
4.4.2	1. způsob řešení	31
4.4.3	2. způsob řešení	32
4.4.4	3. způsob řešení	33
4.4.5	Výpočet středních chyb	34
5	POSTUPNÉ VYROVNÁNÍ.....	35
5.2	PŘIPOJENÍ DALŠÍCH ROVNIC OPRAV	35
5.3	VYPUŠTĚNÍ ROVNIC OPRAV	36
5.4	INVERZE A VÝPOČET NEZNÁMÝCH.....	36
5.5	VÝPOČET OPRAV A VÁHOVÝCH KOEFICIENTŮ	37
5.5.1	Výpočet oprav při přidání rovnic	37
5.5.2	Výpočet oprav při odstranění rovnic.....	37
5.5.3	Výpočet váhových koeficientů	38
6	VÝPOČETNÍ PROGRAM	39
6.1	Hlavní rysy programu	39
6.2	Vstupní data	39
6.3	Princip fungování programu	40
6.4	Popis hlavních funkcí programu	41
6.4.1	Nastavení parametrů výpočtu.....	41
6.4.2	Vstup dat	42
6.4.3	Sestavení matic.....	42
6.4.4	Výpočet.....	44
6.4.5	Výpis protokolu	45
6.4.6	Postupné vyrovnání.....	46
7	PŘÍKLAD POUŽITÍ PROGRAMU - VYROVNÁNÍ PLOŠNÉ SÍTĚ „NEČTINY“	47
7.1	Plošná síť „NEČTINY“	47
7.2	Měření v síti „NEČTINY“	47
7.3	Úprava měřených hodnot před vyrovnáním	48
7.4	Volba vah měřených veličin a apriorní střední chyby	49
7.5	Výsledky vyrovnání.....	51
7.6	Vyrovnání vázané sítě.....	51
7.6.1	Přesnost vyrovnání vázané sítě	52
7.6.2	Statistické hodnocení.....	52
7.7	Vyrovnání volné sítě	53
7.7.1	Vyrovnání s podmínkou $v'Pv + x'x = \min$	54
7.7.2	Vyrovnání zprostředkujících spolu s podmínkami.....	54

7.8	VYROVNÁNÍ V BLOCÍCH.....	55
7.9	POSTUPNÉ VYROVNÁNÍ.....	55
8	HODNOCENÍ RŮZNÝCH ZPŮSOBŮ VÝPOČTU.....	56
8.1	HODNOCENÍ PŘESNOSTI.....	56
8.1.1	<i>Vyrovnaní celé sítě a vyrovnaní v blocích.....</i>	56
8.1.2	<i>Vyrovnaní celé sítě znovu proti postupnému vyrovnaní.....</i>	56
8.1.3	<i>Různé způsoby řešení normálních rovnic.....</i>	57
8.2	HODNOCENÍ RYCHLOSTI VÝPOČTU.....	57
8.2.1	<i>Řešení normálních rovnic inverzí.....</i>	57
8.2.2	<i>Řešení normálních rovnic pomocí speciálního operátoru.....</i>	58
8.2.3	<i>Řešení úlohy vyrovnaní bez sestavování normálních rovnic.....</i>	58
8.2.4	<i>Využití speciálních vlastností matic.....</i>	58
8.2.5	<i>Výsledek hodnocení rychlosti výpočtu.....</i>	59
	ZÁVĚR.....	61
	PŘÍLOHA A – PŘÍKLAD VYROVNÁNÍ PRO TESTOVACÍ DATA.....	62
	VSTUPNÍ SOUBOR.....	62
	PROTOKOL Z PROGRAMU GAMA.....	62
	PROTOKOL Z MATLABU.....	65
	PŘÍLOHA B – VÝSLEDEK VYROVNÁNÍ VÁZANÉ SÍTĚ (VÝTAH).....	66
	POUŽITÉ ZDROJE.....	70

Úvod

Tuto práci lze rozdělit na tři části – teoretickou, popis fungování programu sestaveného pro vyzkoušení teoretických poznatků a praktickou část, ve které je program aplikován na vyrovnání plošné sítě v Nečtinech.

V teoretické části se zabývám některými aspekty vyrovnání metodou nejmenších čtverců. Vybrány jsou takové kapitoly, které souvisí s vyrovnáním plošných sítí. Jedná se o vyrovnání metodou nejmenších čtverců pro různé měřené veličiny (což se někdy označuje jako vyrovnání pro více druhů oprav), nastíněno je i volné vyrovnání. Zvláštní důraz je pak kladen na efektivitu výpočtu – proto jsou zařazeny kapitoly o vyrovnání v blocích a o postupném vyrovnání.

Následuje stručný popis programu v Matlabu, který jsem pro vyrovnání plošných sítí vytvořil. Nejedná se o dokonalý produkt s uživatelským rozhraním, ale spíše o testovací nástroj, který umožňuje snadnou manipulaci s maticemi, se kterými při vyrovnání počítáme, což je jedna z velmi silných stránek Matlabu. Další jeho silnou stránkou jsou numerické výpočty. Použití Matlabu tak umožnilo snadno testovat různé numerické metody pro výpočet řešení daného problému.

V praktické části je pak programem vyrovnána plošná síť v Nečtinech. Spíše než na hodnocení kvality výsledku vyrovnání – tedy přesnosti bodů samotné sítě – se soustředí na hodnocení různých variant řešení této sítě (včetně různých variant numerického řešení) v programu z hlediska vhodnosti jejich použití.

1 Vybrané pojmy ze statistiky a nástin testování výsledků vyrovnání

V této kapitole bude zavedeno nezbytné minimum z matematické statistiky a testování výsledků vyrovnání, a to s ohledem na možnou aplikaci v praktické části této práce. Budou tedy vysvětleny některé základní statistické pojmy, zejm. pojem „skutečná chyba“ a některé její vlastnosti, dále pojem váha měření a její souvislost se středními chybami. Na konci kapitoly je nástin testování výsledků vyrovnání (opět s ohledem na jeho aplikaci v praktické části).

1.1 Základní statistické pojmy

Základním souborem je míněno rozdělení pravděpodobnosti nějaké veličiny; můžeme se na něj dívat jako na statistický soubor, který bychom obdrželi při nekonečně velkém počtu pozorování. Rozdělení pravděpodobnosti dané veličiny lze pak považovat za histogram relativních četností základního souboru [11, s. 225].

Vysvětlení základních pojmů bude demonstrováno na vyrovnání přímých měření (jako na nejjednodušším případě). Odvození pro měření zprostředkující a podmínková je obdobné.

Předpokládejme určitou hodnotu L , kterou měříme s chybou. Měření je tedy náhodnou veličinou, kterou označíme l . Při opakovaném měření budeme dostávat různé konkrétní hodnoty náhodné veličiny, které budeme označovat l_i .

Rozdíl

$$(1.1.1) \quad \varepsilon = L - l$$

nazýváme *skutečná chyba měření* (je to rovněž náhodná veličina).

Rozptyl (angl. *varianci*) náhodné veličiny l značíme

$$(1.1.2) \quad \sigma^2 = V(l)$$

Hodnotu

$$(1.1.3) \quad \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

nazýváme *základní střední náhodná chyba* (tj. střední chyba základního souboru).

Hodnotu

$$(1.1.4) \quad \bar{c} = E(\varepsilon) = L - E(l)$$

nazýváme *systematická složka chyby*.

Hodnotu

$$(1.1.5) \quad \Delta = E(l) - l$$

nazýváme *náhodná složka chyby*.

Zřejmě platí

$$(1.1.6) \quad \varepsilon = \bar{c} + \Delta$$

a tedy základní střední chyba je součtem systematické složky a náhodné složky chyby.

Dále (podrobněji v [4, s. 108])

$$(1.1.7) \quad \bar{m}^2 = E(L - l)^2 = E(\varepsilon^2) = \bar{c}^2 + \sigma^2,$$

kde hodnotu \bar{m}^2 nazýváme *základní úplná variance*, její odmocninu \bar{m} potom *základní střední úplná chyba*.

Základní střední chyba je pro danou veličinu a konkrétní metodu měření při normálních podmínkách předem daná a konstantní během celého měření. V obecném případě tedy neplatí rovnost $\sigma = \bar{m}$, a to proto, že základní střední úplná chyba \bar{m} jako míra přesnosti zahrnuje i systematické vlivy, které působí na měření.

V praxi je však přesné určení charakteristik základního souboru nemožné. Z výsledků pozorování nedostaneme přesnou hodnotu měřené veličiny L , ale pouze její odhad \bar{l} , který nazýváme *vyrovnanou hodnotou*. Nebudeme tak schopni určit ani skutečné chyby ε , ale pouze hodnoty $v = \bar{l} - l$, které nazýváme *opravy*.

Základní střední úplnou chybu pak nahrazujeme *empirickou střední chybou* m , která je pak pouze odhadem přesnosti měření. Počítáme ji z náhodného výběru ze základního souboru, proto se také označuje *výběrová střední chyba*. Platí

$$(1.1.8) \quad m = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n}},$$

kde n je počet stupňů volnosti (často počet nadbytečných pozorování). Budu-li v dalším textu používat pojem střední chyba, bude to většinou právě výběrová střední chyba.

1.2 Princip MNC

Úkolem vyrovnání je

- určit nejpravděpodobnější hodnoty měřených veličin \bar{l} jako odhady neznámých veličin L (případně jiných neznámých parametrů, které jsou s měřenými veličinami ve známém funkčním vztahu)
- odhadnout výpočtem přesnost výsledků vyrovnání

Jednou z metod vyrovnání je metoda nejmenších čtverců (MNČ). Vyrovnání MNČ předpokládá, že jsou splněny jisté podmínky:

1. kladné a záporné chyby téže velikosti jsou stejně pravděpodobné
2. malé chyby jsou pravděpodobnější než velké
3. chyby nad určitou mez se nevyskytují

Chyby, které ovlivňují měření, však obecně tyto předpoklady nespĺňují. Proto tyto chyby rozdělujeme podle jejich charakteru na

- **chyby náhodné**, jež odpovídají uvedeným předpokladům
- **chyby systematické** (pro celou oblast měření) a **polosystematické** (pro dílčí oblasti měření), které uvedené předpoklady nespĺňují. V tomto případě MNČ nedá věrohodné výsledky, víme-li ovšem jakým způsobem tyto chyby na měření působí, lze měření zatížená těmito chybami zpracovat rozšířenou MNČ – kolokací
- **chyby hrubé**, které rovněž nespĺňují dané předpoklady a které je nutno z měření vyloučit

1.3 Váhy měření

Váhy měření jsou čísla, která odrážejí různou přesnost jednotlivých měření. Cílem je, aby se přesnější měření projevila ve výsledku více než měření méně přesná. Protože přesnost měření vyjadřujeme jeho střední chybou, definujeme váhy jako:

$$(1.3.1) \quad p_i = \frac{m_0^2}{m_i^2}$$

kde m_0 je tzv. *jednotková střední chyba*, která odpovídá fiktivnímu měření s jednotkovou vahou $p = 1$. Nutným předpokladem určení volby vah je tedy znalost středních chyb jednotlivých měření m_i a volba jednotkové střední chyby. Jednotkovou střední chybu si mohou zvolit libovolně, což vyplývá z charakteru vah p_i , které vyjadřují poměr mezi různě přesnými měřeními. Podrobnější pojednání o váhách měření bude podáno v podkap. 2.1.

1.4 Testování velikosti skutečných chyb

Normální rozdělení pravděpodobnosti předpokládá, že se mohou vyskytnout i velmi velké skutečné chyby měření (přestože s malou pravděpodobností). V praxi sice působí na měření různé faktory, jejich vliv je však vždy nějakým způsobem omezený. Chyby tedy nemohou nabývat neohraničeně velkých hodnot, jak by ukazoval průběh Gaussovy křivky, ale maximálně absolutní hodnoty ε_{\max} , která je součtem maximálních možných hodnot všech elementárních chyb. Tuto hodnotu nazýváme *největší možná nevyhnutelná chyba*. Pravděpodobnost, že při měření dosáhneme této chyby je však velmi malá. Proto se stanovuje tzv. *mezní chyba* ε_{α} , a to obvykle jako dvojnásobek až trojnásobek střední kvadratické chyby:

$$(1.4.1) \quad \varepsilon_{\alpha} = 2\sigma \text{ až } 3\sigma$$

Problémem zde ovšem zůstává určení hodnot skutečných chyb (a většinou i přesné hodnoty základní střední chyby σ). Tyto hodnoty většinou neznáme. Většinou známe místo skutečných chyb pouze velikosti oprav měřených veličin.

Zde bez dalšího podrobného odvození pouze uvedu, že opravy *nemají* stejné statistické vlastnosti jako skutečné chyby. Zejména nejsou nezávislé, ani když jsou nezávislé skutečné chyby, nemusí mít ani konstantní rozptyl.

Vyplývá to z toho, že opravy (protože závisí na vyrovnaných hodnotách) jsou lineární kombinací skutečných chyb. Hrubá chyba v jednom měření tak ovlivní výrazně vyrovnanou hodnotu a tím i všechny opravy. Zvláště výrazné je to v souborech o malém počtu měření. Normální rozdělení, jako mají skutečné chyby, mají až tzv. *standardizované opravy*. Obsah následujících podkapitol platí pro veličiny mající normální rozdělení – tedy pro skutečné chyby (které ovšem v praxi neznáme), případně pro standardizované opravy. Podrobněji k tomuto tématu viz např. [3].

1.5 Poměr apriorní a aposteriorní střední chyby

Apriorní střední chyba měření je chyba, kterou odhadujeme před samotným vyrovnaním například ze známých vlastností měřických metod a pomůcek.

Aposterioorní střední chyba měření je pak chyba, kterou získáme výpočtem po vyrovnaní měřených veličin.

Lze vyslovit domněnku, že apriorní střední chyba je zatížena zejména náhodnými chybami, kdežto aposteriorní střední chyba je zatížena navíc i některými systematickými chybami a je tedy přesnějším odhadem úplné střední chyby [2, s. 340].

Proto můžeme nesoulad mezi apriorní a aposteriorní střední chybou využít k určení, zda je soubor měření významně zatížen systematickými (polosystematickými) chybami.

Označme apriorní střední chybu m_I a aposteriorní střední chybu m_{II} . Testujeme poměr kvadrátů aposteriorních a apriorních středních chyb, který má F-rozdělení:

$$F = \frac{m_{II}^2}{m_I^2}$$

Jestliže vypočítaná hodnota překročí kritickou hranici $F_\alpha(\alpha, n'_1, n'_2)$, kde α je hladina pravděpodobnosti a n'_1, n'_2 jsou počty nadbytečných měření při výpočtu m_I, m_{II} , soudíme, že větší rozptyl je způsobený systematickým (nebo polosystematickým) působením jednoho nebo více faktorů.

1.6 Zkoušky normality

Podle centrální limitní věty za normálních podmínek měření mají mít hodnoty náhodných chyb normální rozdělení. Podmínkou je zde dostatečný počet měření a jeho reprezentativnost (náhodný výběr musí být věrohodnou zmenšeninou základního souboru).

Jak již bylo uvedeno, samotné opravy normální rozdělení mít nemusí. Zkoušky normality je tedy možné provádět pouze pro skutečné chyby (které ovšem většinou neznáme), nebo pro standardizované opravy (viz. výše).

Jednotlivé zkoušky budou uvedeny bez příslušných odvození. Ta je možno nalézt spolu s příklady v [2].

1.6.1 Zkouška normality pomocí empirických momentů

Označme μ'_k obecný moment k -tého řádu a μ_k centrální moment k -tého řádu

$$\mu'_k = \frac{\sum_{i=1}^n v_i^k}{n} \quad \mu_k = \frac{\sum_{i=1}^n (v_i - \mu'_1)^k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^k}{n}$$

kde n je počet měření a v_i opravy jednotlivých měření. Dále

- 1. obecný moment μ'_1 nazýváme *empirická střední hodnota* a značíme \bar{v} a

- odmocninu z 2. centrálního momentu $\sqrt{\mu_2}$ nazýváme *empirická střední kvadratická chyba* a značíme m .

1.6.2 Zkouška empirické střední hodnoty

Tato zkouška testuje hypotézu $\bar{v} = 0$. Jedná se tedy o odhad intervalu spolehlivosti pro empirickou střední hodnotu oprav. Podle [2, s. 89] leží s pravděpodobností $100(1-\alpha)$ procent hodnota \bar{v} v intervalu

$$\left(-\left| t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{m}{\sqrt{n}} \right|, \left| t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{m}{\sqrt{n}} \right| \right)$$

kde $t_{\frac{\alpha}{2}}$ je jsou kritické hodnoty Studentova rozdělení pro pravděpodobnost $\alpha/2$ a pro empirickou střední chybu m a počet stupňů volnosti n . Nevyjde-li tento test, lze předpokládat, že jsou měření zatížena systematickou chybou.

1.6.3 Zkouška koeficientu šikmosti (asymetrie)

Tato zkouška testuje *koeficient šikmosti*

$$A = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{\mu_3}{m^3}$$

V normálním souboru platí $A = 0$, ve výběrovém souboru leží A s pravděpodobností $100(1-\alpha)$ procent v intervalu:

$$\left(-\left| t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}} \right|, \left| t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}} \right| \right)$$

Pokud nevyjde zkouška asymetrie rozdělení, může to znamenat, že soubor oprav je směsí dvou nebo více nestejně velkých výběrů, které přísluší různým základním souborům s odchylnou střední hodnotou. Soubor, který je směsí základních souborů normálního rozdělení s různými parametry, nazýváme *nestejnorodý soubor*.

1.6.4 Zkouška koeficientu špičatosti (excesu)

Gaussova křivka normálního rozdělení je jednoznačně určena svými parametry – střední hodnotou a variancí. Přesto však mohou existovat distribuční funkce, které mají stejnou střední hodnotu a varianci a přesto netvoří Gaussovu křivku – jsou buďto plošší nebo špičatější než příslušná Gaussova křivka.

Označme *koeficient špičatosti*

$$E = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3$$

Potom pro Gaussovu křivku platí $E = 0$, pro špičatou křivku platí $E > 0$ a pro plochou křivku $E < 0$. Pokud E leží v intervalu

$$\left(- \left| t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}} \right|, \left| t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}} \right| \right)$$

pak test vyšel a s pravděpodobností $100(1-\alpha)$ procent lze tvrdit, že se jedná (z hlediska koeficientu špičatosti) o Gaussovu křivku.

1.6.5 Další testy

Výše uvedené zkoušky normality podle empirických momentů jsou vhodné na základní testování pro svou jednoduchost. Při podrobnější analýze a zejména při zpracování dat na počítači je vhodné použít některý z obvyklých testů normality. Mezi základní testy, které umožňují testovat normalitu daného souboru (skutečných chyb, standardizovaných oprav apod.) patří zejména

- χ^2 test dobré shody
- Kolmogorovův-Smirnovův test
- Lilieforsův test

Popis těchto testů čtenář najde např. v [11].

2 Zprostředkující vyrovnání pro dva i více druhů oprav

V praxi často do vyrovnání vstupují různorodé veličiny – například délky a úhly při vyrovnání plošné sítě. MNČ umožňuje společně vyrovnávat i tyto rozdílné veličiny. Následující odstavce popisují vyrovnání různorodých veličin pro měření zprostředkující. Budeme rovněž předpokládat, že měření jsou zatížena pouze náhodnými chybami.

V této kapitole budou uvedeny 2 možnosti přístupu k problému:

1. klasický způsob, tj. prosté zavedení vah měření
2. zobecnění vyrovnání zprostředkujících měření – zavedení nového pojmu zprostředkujících parametrů a jejich odlišení od měřených veličin

2.1 Zavedení vah měření

Pojem vah byl již stručně popsán v podkapitole 1.3. Nyní se na problematiku vah měření podíváme podrobněji.

V nejjednodušším případě máme soubor měření stejné fyzikální veličiny, která jsou stejně přesná. Skutečná chyba každého jednotlivého měření je pak náhodným výběrem z téhož základního souboru s normálním rozdělením $N(0, \sigma^2)$. Taková měření lze vyrovnávat metodou MNČ bez zavedení vah.

Složitější situace nastává, když uvažujeme měření stejnorodých veličin, avšak s různou přesností. V tomto případě skutečné chyby měření nejsou výběrem z jednoho základního souboru, ale z různých základních souborů o rozdílných rozptylech. Protože aplikace MNČ předpokládá normální rozdělení chyb, musíme tyto soubory transformovat do jednoho základního souboru s normálním rozdělením $N(0, \sigma_0^2)$.

Nechť každé měření náleží do jiného souboru s rozdělením $N(0, \sigma_i^2)$, potom musí platit

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 &= p_i \sigma_i^2 = \text{konst} \\ (2.1.1) \quad p_i &= \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \end{aligned}$$

Hodnotu σ_0 můžeme zvolit libovolně (volíme tím soubor, do kterého budeme normovat).

Váhy se často v literatuře zavádí rovněž výrazem

$$(2.1.2) \quad p_i = \frac{\overline{m}_0^2}{m_i^2}.$$

Výrazy jsou naprosto identické za předpokladu, že neuvažujeme systematickou složku skutečné chyby, viz. (1.1.7). Při neznalosti hodnot skutečných středních chyb \overline{m}_i jsou tyto hodnoty někdy nahrazovány jejich odhady m_i vypočítanými z oprav měřených veličin, viz. (1.1.8) a dostáváme tvar

$$(2.1.3) \quad p_i = \frac{m_0^2}{m_i^2}$$

Při vyrovnání různorodých veličin přistupuje kromě otázky rozdílné velikosti chyb (kterou jsme již vyřešili) rovněž otázka rozměru veličin. To lze vyřešit snadno tím, že hodnota σ_0 bude bezrozměrná, u jednotlivých vah nám pak vyjdou rozměry, které odpovídají převrácené hodnotě kvadrátu dané veličiny. Dokonce i rozměr σ_0 je však možné při jistém zobecnění volit libovolně a přesto nedojde při vyrovnávání k „pomíchání“ rozměrů jednotlivých veličin, podrobněji viz. [5, s. 127].

2.2 Zobecnění vyrovnání zprostředkujících pozorování

2.2.1 Teoretický základ zobecnění

Postup vyrovnání pomocí zprostředkujících pozorování v jeho základní podobě je popsán v [9, s. 23-26]. Úkolem je určit k neznámých veličin x_i , které nejsou přímo měřitelné, pomocí n jiných přímo měřitelných (zprostředkujících) veličin l_i , z nichž každou lze explicitně vyjádřit jako známou funkci F_i hledaných veličin x_i . Protože je však každá měřená veličina nutně zatížena neznámými chybami měření, je nutné určit rovněž odhady těchto chyb – opravy měřených veličin v_i .

Pro každou měřenou veličinu tedy platí:

$$(2.2.1) \quad F_i(x_1, \dots, x_k) = l_i + v_i$$

Může však nastat situace, kdy nemohu vyjádřit závislost měřených veličin na neznámých explicitně. Zatímco v předchozím případě zprostředkující veličiny přímo měřeným veličinám, nyní budou i zprostředkující veličiny vyjádřeny jako funkce měřených.

Pro snazší porozumění textu budu dále označovat:

- „neznámé veličiny“ jako **hledané neznámé** (x_i)
- „zprostředkující veličiny“ jako **zprostředkující parametry** (s_i)
- označení „měřené veličiny“ zůstává (l_i)

Princip metody tedy spočívá ve dvojím vyjádření zprostředkujících parametrů, a to jednou z hledaných neznámých a podruhé z vyrovnaných měřených veličin. Označme

$$(2.2.2) \quad s_i = F_i(\mathbf{x}) = F_i(x_1, x_2, \dots, x_k) \quad i = \{1..n\}$$

závislost n zprostředkujících parametrů s_i na k hledaných neznámých x_j a současně

$$(2.2.3) \quad s_i = f_i(\bar{\mathbf{l}}) = f_i(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_m) \quad i = \{1..n\}$$

závislost n zprostředkujících parametrů s_i na m vyrovnaných měřených veličinách \bar{l}_j (pozor na označení m a n – zprostředkující parametry dříve odpovídaly měřeným veličinám, nyní došlo k rozdělení). Potom platí:

$$(2.2.4) \quad \begin{aligned} F_i(\mathbf{x}) &= f_i(\bar{\mathbf{l}}) \\ F_i(\mathbf{x}_0 + d\mathbf{x}) &= f_i(\mathbf{l} + \mathbf{v}_m) \\ F_i(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial F_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F_i}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial F_i}{\partial x_k} dx_k &= f_i(\mathbf{l}) + \frac{\partial f_i}{\partial l_1} v_{m1} + \frac{\partial f_i}{\partial l_2} v_{m2} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial l_n} v_{mn} \\ F_i(\mathbf{x}_0) + \mathbf{A}_i d\mathbf{x} &= f_i(\mathbf{l}) + \mathbf{D}_i \mathbf{v}_m \end{aligned}$$

, kde

$$(2.2.5) \quad \mathbf{A}_i = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1}, \frac{\partial F_i}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right), \quad \mathbf{D}_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial l_1}, \frac{\partial f_i}{\partial l_2}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial l_n} \right)$$

a \mathbf{v}_m je vektor oprav měřených veličin.

Dále označme

$$(2.2.6) \quad L_i = F_i(\mathbf{x}_0) - f_i(\mathbf{l})$$

a po dosazení získáme vztah

$$(2.2.7) \quad \mathbf{A}_i d\mathbf{x} + L_i = \mathbf{D}_i \mathbf{v}_m$$

Pro všech n zprostředkujících parametrů (resp. rovnic) pak získáme maticové vyjádření

$$(2.2.8) \quad \underbrace{\mathbf{A}}_{n \times k} \underbrace{d\mathbf{x}}_{k \times 1} + \underbrace{\mathbf{L}}_{n \times 1} = \underbrace{\mathbf{D}}_{n \times m} \underbrace{\mathbf{v}_m}_{m \times 1} = \underbrace{\mathbf{v}_z}_{n \times 1}$$

kde jsme zavedli novou neznámou \mathbf{v}_z - vektor oprav zprostředkujících parametrů a vektor oprav \mathbf{dx} jsme přeznačili v souladu s [9] na \mathbf{x} . Tím jsme získali formálně stejné vyjádření jako při klasickém řešení zprostředkujících měření.

2.2.2 Poznámka k zavedení zprostředkujících parametrů

Funkce f_i v rov. (2.2.3) vyjadřují obecně vztahy mezi měřenými veličinami a zprostředkujícími parametry. Měřené veličiny označujeme l_i, \bar{l}_i, L_i podle toho, zda se jedná o skutečně naměřenou hodnotu, vyrovnanou hodnotu nebo skutečnou hodnotu dané veličiny. Po jejich dosazení do funkce f_i tedy získáme rovněž 3 různé hodnoty zprostředkujících parametrů, které by se nabízelo označit

$$(2.2.9) \quad \begin{aligned} s_i &= f_i(l_1, l_2, \dots, l_n) \\ \bar{s}_i &= f_i(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_n) \quad , \\ S_i &= f_i(L_1, L_2, \dots, L_n) \end{aligned}$$

nicméně obvykle se pruh nad vyrovnanými hodnotami \bar{s}_i vynechává. Vynechávám jej i v tomto textu.

2.2.3 Vyrovnaní pro 1 druh oprav

Jedná se o stručné zopakování důležitých vztahů uvedených v [9], které budou zapotřebí v dalším výkladu. Vycházíme z nejjednoduššího tvaru rovnic pro vyrovnaní zprostředkujících měření

$$(2.2.10) \quad \mathbf{Ax} + \mathbf{L} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}.$$

Poněkud složitější je tvar zprostředkujících rovnic

$$(2.2.11) \quad \mathbf{Ax} + \mathbf{Cy} + \mathbf{L} = \mathbf{v},$$

kde \mathbf{y} je vektor neznámých parametrů (viz [9, s. 41]). K těmto rovnicím připojíme r podmínkových rovnic mezi hledanými neznámými \mathbf{x} (opět viz [9, s. 48]). Jejich soustava má tvar

$$(2.2.12) \quad \mathbf{Bx} + \mathbf{U} = \mathbf{0}.$$

Předchozí rovnice navíc často umožňuje odstranit případnou singularitu výrazu $\mathbf{A}^T \mathbf{PA}$, potřebného k řešení normálních rovnic pomocí inverzní matice. Společná soustava rovnic

(2.2.10) a (2.2.12) je řešena v [9, kap. 7] a soustava rovnic (2.2.11) a (2.2.12) v [9, kap. 10.2].

Po úpravách získáme soustavu

$$(2.2.13) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}$$

pro případ řešení rovnic (2.2.10) a (2.2.12), tedy pro případ vyrovnání zprostředkujících měření plus podmínková pozorování. Úpravy rovnic (2.2.11) a (2.2.12) vedou na výslednou soustavu

$$(2.2.14) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{C} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{C}^T \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{C}^T \mathbf{P} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \\ \mathbf{C}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}$$

pro případ vyrovnání zprostředkujících měření s neznámými parametry plus měření podmínková, viz [9, s. 47]. V rov. (2.2.13) a (2.2.14) představuje \mathbf{k} vektor korelát zavedený z důvodu řešení minimalizační funkce s Lagrangeovou podmínkou, což plyne z existence podmínkových rovnic (2.2.12).

2.2.4 Vyrovnání pro více druhů oprav

V dalším textu dojde ke změně pravých stran rov. (2.2.10), resp. (2.2.11) ve smyslu zobecnění uvedeného v kap. 2.2.1.

Již víme, že platí

$$(2.2.15) \quad \mathbf{D} \mathbf{v}_m = \mathbf{v}_z, \text{ kde}$$

$$(2.2.16) \quad \mathbf{v}_m = (v_1^1 \dots v_{n_1}^1, v_1^2 \dots v_{n_2}^2, \dots, v_1^N \dots v_{n_N}^N).$$

je vektor oprav měřených veličin N druhů. Velikost vektoru \mathbf{v}_m je $n_1 + n_2 + \dots + n_N = m$ (počet měřených veličin). Pro zjednodušení zápisu provedeme formální změnu rovnice (2.2.16) na tvar

$$(2.2.17) \quad \begin{aligned} \mathbf{v}_m^T &= (v_{m_1}, v_{m_2}, \dots, v_{m_m}) \\ \mathbf{v}_z^T &= (v_{z_1}, v_{z_2}, \dots, v_{z_n}) \end{aligned}$$

kde náhodné opravy v_{m_1} až v_{m_m} jsou opravami měřených veličin, na rozdíl od oprav v_{z_1} až v_{z_n} vektoru \mathbf{v}_z , které jsou opravami zprostředkujících parametrů. Rovnice (2.2.15) nabude tvaru

$$(2.2.18) \quad \mathbf{D}\mathbf{v}_m = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{m_1} \\ v_{m_2} \\ \vdots \\ v_{m_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{z_1} \\ v_{z_2} \\ \vdots \\ v_{z_m} \end{pmatrix} = \mathbf{v}_z.$$

Rovnice (2.2.11) pak přejde do tvaru

$$(2.2.19) \quad \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{L} = \mathbf{v}_z, \quad \mathbf{P}_z = \mathbf{Q}_z^{-1}.$$

Zde je nutné upozornit na to, že jak matice \mathbf{A} , tak matice \mathbf{C} , se rovněž vztahují ke zprostředkujícím parametrům, ne k přímo měřeným veličinám! Matice \mathbf{P}_z je matice vah zprostředkujících parametrů, kterou zatím neznáme. Abychom ji určili, je třeba nejprve sestavit matici vah měřených veličin \mathbf{P}_m , a poté pomocí ní sestavit matici \mathbf{P}_z . Bude tak učiněno později.

Princip vyrovnaní MNČ vychází z podmínky

$$(2.2.20) \quad \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} + 2\mathbf{k}^T (\mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{U}) = \min,$$

ovšem pro vektor oprav měřených veličin $\mathbf{v} = \mathbf{v}_m$. Lze však ukázat, že podmínky

$$(2.2.21) \quad \begin{aligned} \mathbf{v}_m^T \mathbf{P}_m \mathbf{v}_m^T + 2\mathbf{k}^T (\mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{U}) &= \min \text{ a} \\ \mathbf{v}_z^T \mathbf{P}_z \mathbf{v}_z^T + 2\mathbf{k}^T (\mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{U}) &= \min \end{aligned}$$

jsou ekvivalentní, viz např. [6].

Po dosazení do minimalizační funkce za \mathbf{v}_z dostaneme vztah

$$(2.2.22) \quad (\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T + \mathbf{y}^T \mathbf{C}^T + \mathbf{L}^T) \mathbf{P}_z (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{L}) + 2\mathbf{k}^T (\mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{U}) = \min,$$

který upravíme, derivujeme podle \mathbf{x} , poté podle \mathbf{y} a opět upravíme. Po připojení rovnice (2.2.12) dostáváme konečný tvar

$$(2.2.23) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_z \mathbf{A} & \mathbf{A}^T \mathbf{P}_z \mathbf{C} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{C}^T \mathbf{P}_z \mathbf{A} & \mathbf{C}^T \mathbf{P}_z \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_z \mathbf{L} \\ \mathbf{C}^T \mathbf{P}_z \mathbf{L} \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}.$$

V této rovnici označíme matici na levé straně \mathbf{N}_{xx} , vektor $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{k})^T = \mathbf{X}$ a vektor na pravé straně \mathbf{L}_{xx} . Rovnici přepíšeme do tvaru

$$(2.2.24) \quad \mathbf{N}_{xx} \mathbf{X} = -\mathbf{L}_{xx}$$

odkud je zřejmé řešení (zavedeme navíc označení $\mathbf{N}_{xx}^{-1} = \mathbf{Q}_{xx}$)

$$(2.2.25) \quad \mathbf{X} = -\mathbf{N}_{xx}^{-1}\mathbf{L}_{xx} = -\mathbf{Q}_{xx}\mathbf{L}_{zz},$$

čímž je podstata úlohy vyřešena. Zbývá odhadnout přesnost výsledných hodnot, což znamená vypočítat náhodné opravy (různých druhů) a střední chyby (různých veličin).

2.2.5 Výpočet vah zprostředkujících parametrů

Doplněním (1.1.1) (a přeznačením ε na ε_m z důvodu nutnosti rozlišovat skutečné chyby měřených ε_m a zprostředkujících parametrů ε_z) do (2.2.9) dostaneme vztah

$$(2.2.26) \quad f_i(\mathbf{L}) = f_i(\mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}_{m1}),$$

který rozvineme v Taylorovu řadu

$$(2.2.27) \quad f_i(\mathbf{L}) = f_i(\mathbf{I}) + \frac{\partial f_i}{\partial L_1} \varepsilon_{m1} + \frac{\partial f_i}{\partial L_2} \varepsilon_{m2} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial L_n} \varepsilon_{mn}.$$

Rozdíl

$$(2.2.28) \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{zi} = f_i(\mathbf{L}) - f_i(\mathbf{I})$$

označuje skutečnou chybu zprostředkujícího parametru s_i . Zdánlivě „různé“ parciální derivace ve výrazech (2.2.5) a (2.2.27) jsou ve skutečnosti parciální derivace téže funkce f_i po jejich složkách a jsou tedy stejné. Můžeme tedy psát

$$(2.2.29) \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{zi} = \mathbf{D}_i \boldsymbol{\varepsilon}_{mi}$$

a pro všech n zprostředkujících měření potom

$$(2.2.30) \quad \boldsymbol{\varepsilon}_z = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_m$$

Tím jsme vyjádřili zákon přenášení skutečných chyb. Nyní je třeba přejít ke středním chybám \bar{m} . Vztah (2.2.29) umocníme na druhou a přejdeme ke středním chybám

$$(2.2.31) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_z \boldsymbol{\varepsilon}_z^T &= \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_m \boldsymbol{\varepsilon}_m^T \mathbf{D}^T \\ E(\boldsymbol{\varepsilon}_z \boldsymbol{\varepsilon}_z^T) &= \mathbf{D} E(\boldsymbol{\varepsilon}_m \boldsymbol{\varepsilon}_m^T) \mathbf{D}^T \end{aligned}$$

Za předpokladu, že skutečné chyby ε_m nejsou zatíženy systematickou složkou a za předpokladu jejich nezávislosti (tj. $E(\varepsilon_{mi} \varepsilon_{mj}) = 0$ pro $i \neq j$), můžeme na pravé straně přejít

středním chybám, viz rov. (1.1.7). Výraz na levé straně představuje kovarianční matici zprostředkujících parametrů.

$$\begin{aligned}
 E(\boldsymbol{\varepsilon}_z \boldsymbol{\varepsilon}_z^T) &= \mathbf{D} E \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{m1}^2 & \boldsymbol{\varepsilon}_{m1} \boldsymbol{\varepsilon}_{m2} & \cdots & \boldsymbol{\varepsilon}_{m1} \boldsymbol{\varepsilon}_{mn} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{m2} \boldsymbol{\varepsilon}_{m1} & \boldsymbol{\varepsilon}_{m2}^2 & \cdots & \boldsymbol{\varepsilon}_{m2} \boldsymbol{\varepsilon}_{mn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{nm} \boldsymbol{\varepsilon}_{m1} & \boldsymbol{\varepsilon}_{nm} \boldsymbol{\varepsilon}_{m2} & \cdots & \boldsymbol{\varepsilon}_{nm}^2 \end{pmatrix} \mathbf{D}^T \\
 E(\boldsymbol{\varepsilon}_z \boldsymbol{\varepsilon}_z^T) &= \mathbf{D} \begin{pmatrix} E(\boldsymbol{\varepsilon}_{m1}^2) & E(\boldsymbol{\varepsilon}_{m1} \boldsymbol{\varepsilon}_{m2}) & \cdots & E(\boldsymbol{\varepsilon}_{m1} \boldsymbol{\varepsilon}_{mn}) \\ E(\boldsymbol{\varepsilon}_{m2} \boldsymbol{\varepsilon}_{m1}) & E(\boldsymbol{\varepsilon}_{m2}^2) & \cdots & E(\boldsymbol{\varepsilon}_{m2} \boldsymbol{\varepsilon}_{mn}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(\boldsymbol{\varepsilon}_{nm} \boldsymbol{\varepsilon}_{m1}) & E(\boldsymbol{\varepsilon}_{nm} \boldsymbol{\varepsilon}_{m2}) & \cdots & E(\boldsymbol{\varepsilon}_{nm}^2) \end{pmatrix} \mathbf{D}^T \\
 E(\boldsymbol{\varepsilon}_z \boldsymbol{\varepsilon}_z^T) &= \mathbf{D} \begin{pmatrix} E(\boldsymbol{\varepsilon}_{m1}^2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E(\boldsymbol{\varepsilon}_{m2}^2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & E(\boldsymbol{\varepsilon}_{nm}^2) \end{pmatrix} \mathbf{D}^T \\
 E(\boldsymbol{\varepsilon}_z \boldsymbol{\varepsilon}_z^T) &= \mathbf{D} \begin{pmatrix} \overline{m}_{m1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \overline{m}_{m1}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \overline{m}_{m1}^2 \end{pmatrix} \mathbf{D}^T
 \end{aligned}
 \tag{2.2.32}$$

Nyní přejdeme ke vztahu mezi váhami měřených veličin zprostředkujících parametrů. Podle rov. (2.1.2) přepíšeme pravou stranu poslední z rovnic. Vztah mezi kovarianční maticí a maticí vah na levé straně přepíšeme pomocí výrazu (bez odvození)

$$(2.2.33) \quad E(\boldsymbol{\varepsilon}_z \boldsymbol{\varepsilon}_z^T) = m_{z0}^2 \mathbf{P}_z$$

a získáme tvar

$$(2.2.34) \quad m_{z0}^2 \mathbf{P}_z = \mathbf{D} m_{m0}^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{p_{m11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_{m22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{p_{m_{mm}}} \end{pmatrix} \mathbf{D}^T .$$

Zavedeme jednotkovou střední chybu zprostředkujících parametrů $m_{z_0}^2 = m_{m_0}^2$, Můžeme si ji zvolit libovolně obdobně jako m_{m_0} , viz. odst. 2.1. Nadále ji budeme označovat pouze m_0 . Tato volba zajistí, že obě jednotkové střední chyby vypadnou

$$(2.2.35) \quad \begin{aligned} \mathbf{P}_z^{-1} &= \mathbf{D}\mathbf{P}_m^{-1}\mathbf{D}^T \\ \mathbf{P}_z &= (\mathbf{D}\mathbf{P}_m^{-1}\mathbf{D}^T)^{-1} \end{aligned}$$

Tím jsme získali pro výpočet nezbytnou matici vah zprostředkujících parametrů \mathbf{P}_z jako funkci matice \mathbf{P}_m . Matice \mathbf{P}_z je obecně plná. Problematikou sestavení matice vah \mathbf{P}_m jsme se zabývali v odst. 2.1. Zde jen zdůrazním, že volba vah v matici \mathbf{P}_m závisí na volbě apriorní jednotkové střední chyby (a to nikoliv lineárně!).

2.2.6 Výpočet oprav

Následuje výpočet oprav zprostředkujících parametrů podle

$$(2.2.36) \quad \mathbf{v}_z = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{L}$$

a výpočet oprav měřených veličin [6, s. 15]

$$(2.2.37) \quad \mathbf{v}_m = \mathbf{P}_m^{-1}\mathbf{D}^T\mathbf{P}_z\mathbf{v}_z.$$

2.2.7 Výpočet aposteriorních středních chyb

Nejprve spočítáme aposteriorní jednotkovou střední chybu

$$(2.2.38) \quad m_0^2 = \frac{\mathbf{v}_z^T \mathbf{P}_z \mathbf{v}_z}{m + r - k - l}$$

a porovnáme její poměr s apriorní jednotkovou střední chybou \bar{m}_0^2 , viz odst. 1.5.

Následuje ještě výpočet středních chyb neznámých

$$(2.2.39) \quad m_{xx_{ii}}^2 = m_0^2 Q_{xx_{ii}},$$

čímž je podstata úlohy vyřešena.

3 Volné vyrovnání

Volné vyrovnání metodou nejmenších čtverců se používá zejména v případech, kdy matice soustavy normálních rovnic je z různých důvodů singulární. Máme pak v zásadě několik možností řešení takové soustavy:

- řešení pomocí tzv. pseudoinverze (o kterém zde nebude řeč)
- řešení přidáním podmínky $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = \min$
- pro účely volných sítí užitím matice podmínek \mathbf{F}

3.1 Volné vyrovnání zprostředkujících měření

Volné vyrovnání je definováno klasickou minimalizační podmínkou, ke které přistupuje zvláštní podmínka mezi přírůstky neznámých \mathbf{x} (připomínám, že u vyrovnání zprostředkujících pozorování označuje vektor \mathbf{x} přírůstky neznámých, viz též [9, kap. 7]).

$$(3.1.1) \quad \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} + \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \min .$$

Pro případ volného vyrovnání zprostředkujících pozorování dostáváme tvar

$$(3.1.2) \quad (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{L})^T \mathbf{P} (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{L}) + \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \min$$

Tuto funkci budeme derivovat podle proměnné \mathbf{x} a dále upravíme

$$(3.1.3) \quad \mathbf{2A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} + \mathbf{2x} = \mathbf{0}$$

$$\left(\underbrace{\mathbf{A}^T}_{k \times n} \underbrace{\mathbf{P}}_{n \times n} \underbrace{\mathbf{A}}_{n \times k} + \underbrace{\mathbf{E}}_{k \times k} \right) \underbrace{\mathbf{x}}_{k \times 1} = - \underbrace{\mathbf{A}^T}_{k \times n} \underbrace{\mathbf{P}}_{n \times n} \underbrace{\mathbf{l}}_{n \times 1} ,$$

kde matice \mathbf{E} představuje jednotkovou matici o rozměrech $k \times k$. Řešení pak snadno získáme ve tvaru

$$(3.1.4) \quad \mathbf{x} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} ,$$

samozřejmě za předpokladu regularity matice $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{E}$. Tato matice je však v praxi (díky přičtené jednotkové matici) téměř vždy regulární.

Následuje výpočet jednotkové střední chyby

$$(3.1.5) \quad m_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n - k}} ,$$

dále vypočítáme střední chyby naměřených veličin

$$(3.1.6) \quad m_{l_i} = \frac{m_0}{\sqrt{p_i}}$$

a střední chyby vyrovnaných neznámých

$$(3.1.7) \quad m_{xx_i} = m_0 \sqrt{Q_{xx_i}},$$

kde $Q_{xx_i} = \text{diag } \mathbf{Q}_{xx}$ a $\mathbf{Q}_{xx} = \mathbf{N}^{-1}$, $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{E}$.

3.2 Volné vyrovnání zprostředkujících spolu s podmínkami

Postupujeme podle [9, kap. 7]. Minimalizujeme rovnici

$$(3.2.1) \quad \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} + \mathbf{x}^T \mathbf{x} + 2\mathbf{k}^T (\mathbf{B} \mathbf{x} + \mathbf{U}) = \min .$$

Dosadíme za \mathbf{v} známý výraz $\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{L}$ a derivujeme podle \mathbf{x}

$$(3.2.2) \quad \begin{aligned} & (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{L})^T \mathbf{P} (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{L}) + \mathbf{x}^T \mathbf{x} + 2\mathbf{k}^T (\mathbf{B} \mathbf{x} + \mathbf{U}) = \min \\ & 2\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} + 2\mathbf{x} + 2\mathbf{B}^T \mathbf{k} = \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} + \mathbf{x} + \mathbf{B}^T \mathbf{k} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

K poslední rovnici přidáme vztah $\mathbf{B} \mathbf{x} = -\mathbf{U}$ a zapíšeme jako matici

$$(3.2.3) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{E} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}$$

Řešení spočítáme přímým postupem snadno jako

$$(3.2.4) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{E} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}$$

Výpočet středních chyb je stejný jako obvykle.

3.3 Volné vyrovnání pro účely plošné sítě

Tento způsob vyrovnání je podrobně popsán v [1]. Tímto způsobem vyrovnání se v této práci nebudu teoreticky podrobně zabývat a uvedu pouze základní myšlenku a výsledný vztah potřebný v praktické části této práce. Podrobnosti lze najít v uvedeném článku.

Při vyrovnání plošné sítě si lze představit 2 možné situace:

- Síť je připojena na body o známých souřadnicích, těmto bodům nejsou přisuzovány žádné opravy. Jedná se o tzv. *vloženou síť*, která by měla být jednoznačně řešitelná.
- Druhým případem je *volná síť*, ve které jsou všechny body považovány za neznámé. Matice soustavy normálních rovnic je pak singulární – poloha sítě totiž není jednoznačně určena v rovině (lze ji otáčet, posouvat, v triangulační síti i měnit měřítko). Výhodou ovšem je, že vypočítaná konfigurace sítě nijak nezávisí na bodech o známých souřadnicích a jejich případná nepřesnost nezkresluje tvar sítě.

Protože však volná síť není jednoznačně umístěna v rovině, soustava není jednoznačně řešitelná a z vyrovnání nemůžeme získat souřadnice bodů. Jednou z možností je použití podmínky z odst. 3.1. Jinou možností, která se při vyrovnání volných sítí většinou užívá, je doplnění soustavy normálních rovnic o podmínkovou matici \mathbf{F} . Jedná se pak tedy o vyrovnání zprostředkujících měření spolu s podmínkami, soustava má tvar

$$(3.3.1) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{F}^T \\ \mathbf{F} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

kde matice \mathbf{F} má speciální tvar, který závisí jak na dimenzi sítě (liší se pro síť nivelační, plošnou a prostorovou), tak u plošné a prostorové sítě na tom, zda se jedná o síť, ve které byly měřeny i délky nebo pouze o triangulační síť. \mathbf{k} je vektor korelát (stejně jako při obvyklém vyrovnání zprostředkujících s podmínkami).

Pro potřeby praktické části této práce uvedu tvar matice \mathbf{F} pro plošnou trigonometrickou síť, ve které byly měřeny i délky. Tvar této matice je podle [1]

$$(3.3.2) \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ -y_{01} & x_{01} & -y_{02} & x_{02} & \dots & -y_{0k} & x_{0k} \end{pmatrix},$$

kde x_{0i} , y_{0i} značí přibližné souřadnice příslušných bodů.

Zbývá doplnit, že některé dvojice sloupců matice \mathbf{F} mohou být nulové (nemusí mít uvedenou strukturu). Body příslušející daným sloupcům se pak plně použijí pro vyrovnání sítě, nepoužijí se však pro její umístění do roviny. Tvar vyrovnávané sítě na matici \mathbf{F} nezáleží. Volbou matice \mathbf{F} tedy můžeme určit, které body se využijí pro umístění sítě do roviny. Popsanou strukturu však musíme dodržet nejméně u dvou bodů. (pro tento případ sítě). Jediný bod by jednoznačné umístění sítě do roviny neumožnil.

4 Vyrovnání v blocích

4.1 Princip vyrovnání v blocích

Tento způsob vyrovnání se rovněž někdy nazývá vyrovnání ve skupinách nebo sekvenční vyrovnání. Tyto pojmy se však nesmí zaměňovat s postupným vyrovnáním, o němž bude řeč v kap. 5.

Předpokládáme, že máme několik systémů zprostředkujících rovnic. Všechny systémy mají společné některé neznámé (tzv. *vnější neznámé*), avšak každý systém má navíc i další neznámé, které se v ostatních systémech nevyskytují (tzv. *vnitřní neznámé*). Může se jednat například o společné vyrovnání několika sítí, které mají některé body společné. Označme \mathbf{x}_i vektor neznámých příslušející pouze i -tému systému a \mathbf{x}' vektor neznámých, které se vyskytují ve více systémech (alespoň ve dvou). Pak můžeme zprostředkující rovnice příslušející jednotlivým systémům (v uvedeném příkladu jednotlivým sítím) zapsat jako

$$(4.1.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}'_1 \mathbf{x}' + \mathbf{L}_1 &= \mathbf{v}_1, & \mathbf{P}_1 \\ &= \mathbf{v}_2, & \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{A}'_2 \mathbf{x}' + \mathbf{L}_2 &\vdots \\ \mathbf{A}_n \mathbf{x}_n + \mathbf{A}'_n \mathbf{x}' + \mathbf{L}_n &= \mathbf{v}_n, & \mathbf{P}_n \end{aligned}$$

Tento systém nyní zapíšeme v maticovém vyjádření jako

$$(4.1.2) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{A}'_1 \\ 0 & \mathbf{A}_2 & 0 & \cdots & \mathbf{A}'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{A}_n & \mathbf{A}'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{L}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{pmatrix}, \mathbf{P}$$

neboli

$$(4.1.3) \quad \mathbf{Ax} + \mathbf{L} = \mathbf{v}, \mathbf{P}$$

Tím jsme získali klasický formální zápis pro vyrovnání zprostředkujících pozorování.

4.2 Tvar matice P

Váhová matice P může nabývat následujících tvarů:

a) **Nekorelovaná měření**

$$(4.2.1) \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & & & \\ & \mathbf{P}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{P}_n \end{pmatrix},$$

kde matice \mathbf{P}_i jsou diagonální matice a tedy i celá matice \mathbf{P} je diagonální.

b) **Měření jsou korelovaná v rámci jednotlivých skupin**

Tvar matice je stejný jako v případě a), avšak jednotlivé matice \mathbf{P}_i jsou obecně plné a matice \mathbf{P} je tedy maticí kvazidiagonální.

c) **Měření jsou korelovaná i mezi skupinami**

Tento případ by vedl na obecně plnou matici \mathbf{P} , ale odporuje předpokladu nezávislosti jednotlivých systémů a nebude dále uvažován.

4.3 Tvar matice $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$

Pro jednotlivé způsoby řešení bude důležitý tvar matice $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$. Proto jej nyní odvodíme. Nechť i -tý systém má n_i zprostředkujících rovnic a k_i vlastních (vnitřních) neznámých. Vnějších neznámých nechť je k' . Rozměry jednotlivých submatic matice \mathbf{A} , transponované matice \mathbf{A}^T a matice \mathbf{P} jsou pak následující

$$(4.3.1) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \underbrace{\mathbf{A}_1}_{n_1 \times k_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \underbrace{\mathbf{A}'_1}_{n_1 \times k'} \\ \mathbf{0} & \underbrace{\mathbf{A}_2}_{n_2 \times k_2} & \mathbf{0} & \cdots & \underbrace{\mathbf{A}'_2}_{n_2 \times k'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \underbrace{\mathbf{A}_n}_{n_n \times k_n} & \underbrace{\mathbf{A}'_n}_{n_n \times k'} \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} \underbrace{\mathbf{A}_1^T}_{k_1 \times n_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underbrace{\mathbf{A}_2^T}_{k_2 \times n_2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \underbrace{\mathbf{A}_n^T}_{k_n \times n_n} \\ \underbrace{\mathbf{A}'_1{}^T}_{k' \times n_1} & \underbrace{\mathbf{A}'_2{}^T}_{k' \times n_2} & \cdots & \underbrace{\mathbf{A}'_n{}^T}_{k' \times n_n} \end{pmatrix}$$

$$(4.3.2) \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \underbrace{\mathbf{P}_1}_{n_1 \times n_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underbrace{\mathbf{P}_2}_{n_2 \times n_2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \underbrace{\mathbf{P}_n}_{n_n \times n_n} \end{pmatrix}$$

Pro součin matic $\mathbf{A}^T \mathbf{P}$ pak zřejmě platí

$$\begin{pmatrix} \underbrace{\mathbf{A}_1^T}_{k_1 \times n_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underbrace{\mathbf{A}_2^T}_{k_2 \times n_2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \underbrace{\mathbf{A}_n^T}_{k_n \times n_n} \\ \underbrace{\mathbf{A}'_1{}^T}_{k' \times n_1} & \underbrace{\mathbf{A}'_2{}^T}_{k' \times n_2} & \cdots & \underbrace{\mathbf{A}'_n{}^T}_{k' \times n_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underbrace{\mathbf{P}_1}_{n_1 \times n_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underbrace{\mathbf{P}_2}_{n_2 \times n_2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \underbrace{\mathbf{P}_n}_{n_n \times n_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_n^T \mathbf{P}_n \\ \mathbf{A}'_1{}^T \mathbf{P}_1 & \mathbf{A}'_2{}^T \mathbf{P}_2 & \cdots & \mathbf{A}'_n{}^T \mathbf{P}_n \end{pmatrix}$$

kde jednotlivé submatice mají stejný rozměr jako příslušné submatice v matici \mathbf{A}^T . Součin $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$ pak podle pravidel násobení matic vyjádříme jako

$$(4.3.3) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_n^T \mathbf{P}_n \\ \mathbf{A}'_1{}^T \mathbf{P}_1 & \mathbf{A}'_2{}^T \mathbf{P}_2 & \cdots & \mathbf{A}'_n{}^T \mathbf{P}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underbrace{\mathbf{A}_1}_{n_1 \times k_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \underbrace{\mathbf{A}'_1}_{n_1 \times k'} \\ \mathbf{0} & \underbrace{\mathbf{A}_2}_{n_2 \times k_2} & \mathbf{0} & \cdots & \underbrace{\mathbf{A}'_2}_{n_2 \times k'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \underbrace{\mathbf{A}_n}_{n_n \times k_n} & \underbrace{\mathbf{A}'_n}_{n_n \times k'} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A}'_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_2 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{A}'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_n^T \mathbf{P}_n \mathbf{A}_n & \mathbf{A}_n^T \mathbf{P}_n \mathbf{A}'_n \\ \mathbf{A}'_1{}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}'_2{}^T \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_2 & \cdots & \mathbf{A}'_n{}^T \mathbf{P}_n \mathbf{A}_n & \sum \mathbf{A}'_i{}^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}'_i \end{pmatrix}$$

4.4 Řešení vyrovnaní v blocích

Klasickou podmínku MNC $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \min$ můžeme při řešení vyrovnaní v blocích zapsat třemi různými způsoby:

$$(4.4.1) \quad \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \min,$$

$$(4.4.2) \quad \mathbf{v}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{v}_1 = \min_1, \quad \mathbf{v}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{v}_2 = \min_2, \quad \dots, \quad \mathbf{v}_n^T \mathbf{P}_n \mathbf{v}_n = \min_n \text{ nebo}$$

$$(4.4.3) \quad \mathbf{v}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n^T \mathbf{P}_n \mathbf{v}_n = \min.$$

Nyní postupně vyřešíme tyto jednotlivé případy.

4.4.2 1. způsob řešení

Řešíme rovnici (4.4.1), ve které $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$. Za \mathbf{v} můžeme dosadit přímo ze vztahu (4.1.3) a po derivování a úpravách dostaneme známý tvar

$$(4.4.4) \quad (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} = -\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L}$$

Využijeme vztahů odvozených v odst. 4.3 a rozepíšeme matice $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L}$ a vektor \mathbf{x}

$$(4.4.5) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A}'_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_2 & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{A}'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_n^T \mathbf{P}_n \mathbf{A}_n & \mathbf{A}_n^T \mathbf{P}_n \mathbf{A}'_n \\ \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_2 & \dots & \mathbf{A}_n^T \mathbf{P}_n \mathbf{A}_n & \sum \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}'_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{L}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_n^T \mathbf{P}_n \mathbf{L}_n \\ \sum \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{L}_i \end{pmatrix}.$$

Nyní roznásobíme levou stranu – prvních n „řádek“ (ve skutečnosti samozřejmě představuje každý řádek samostatný systém rovnic) lze zapsat symbolicky stejně

$$(4.4.6) \quad \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}'_i \mathbf{x}' = \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{L}_i,$$

poslední „řádek“ potom

$$(4.4.7) \quad \sum (\mathbf{A}'_i \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i) + \left(\sum \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}'_i \right) \mathbf{x}' = \sum \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{L}_i.$$

Z rovnice (4.4.6) vyjádříme \mathbf{x}_i

$$(4.4.8) \quad \mathbf{x}_i = -(\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i)^{-1} (\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}'_i \mathbf{x}' + \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{L}_i)$$

a dosadíme do (4.4.7)

$$(4.4.9) \quad \sum \left(-\mathbf{A}'_i \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i (\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i)^{-1} (\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}'_i \mathbf{x}' + \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{L}_i) \right) + \left(\sum \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}'_i \right) \mathbf{x}' = \sum \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{L}_i.$$

Tyto sumy spojíme a rozdělím tak, abych v jedné sumě měl všechny koeficienty u \mathbf{x}' a v druhé zbytek; zároveň zavedu substituci za výrazy v sumách. Rovnice přejde na tvar

$$(4.4.10) \quad \begin{aligned} & \mathbf{x}' \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(-\mathbf{A}'_i \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i (\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i)^{-1} (\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}'_i) + \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}'_i \right)}_{\mathbf{M}_i} = \\ & = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\mathbf{A}'_i \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i (\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i)^{-1} \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{L}_i - \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{L}_i \right)}_{\mathbf{N}_i}, \end{aligned}$$

a tedy získám řešení ve tvaru

$$(4.4.11) \quad \mathbf{x}' = \frac{\sum_1^n \mathbf{N}_i}{\sum_1^n \mathbf{M}_i}.$$

Následuje výpočet jednotlivých vektorů \mathbf{x}_i podle rovnic (4.4.8).

4.4.3 2. způsob řešení

Řešíme rovnici (4.4.2). Tyto rovnice pro zprostředkující pozorování můžeme rovněž zapsat ve tvaru

$$(4.4.12) \quad (\mathbf{A}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{A}'_i \mathbf{x}' + \mathbf{L}_i)^T \mathbf{P}_i (\mathbf{A}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{A}'_i \mathbf{x}' + \mathbf{L}_i) = \min_i.$$

Tuto rovnici derivujeme podle \mathbf{x}_i a podruhé podle \mathbf{x}' . Získáme dvojici rovnic

$$(4.4.13) \quad \begin{aligned} \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}'_i \mathbf{x}' + \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{L}_i &= \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_i'^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{A}_i'^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}'_i \mathbf{x}' + \mathbf{A}_i'^T \mathbf{P}_i \mathbf{L}_i &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme \mathbf{x}_i

$$(4.4.14) \quad \mathbf{x}_i = -(\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i)^{-1} (\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}'_i \mathbf{x}' + \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{L}_i),$$

dosadíme jej do druhé rovnice (4.4.13)

$$(4.4.15) \quad -\mathbf{A}_i'^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i (\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i)^{-1} (\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}'_i \mathbf{x}' + \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{L}_i) + \mathbf{A}_i'^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}'_i \mathbf{x}' + \mathbf{A}_i'^T \mathbf{P}_i \mathbf{L}_i = \mathbf{0}$$

a upravíme na následující tvar se současným zavedením stejné substituce jako v rovnici

(4.4.10)

$$\underbrace{(\mathbf{A}_i'^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}'_i - \mathbf{A}_i'^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i (\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i)^{-1} \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}'_i)}_{\mathbf{M}_i} \mathbf{x}' = \underbrace{\mathbf{A}_i'^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i (\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i)^{-1} \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{L}_i - \mathbf{A}_i'^T \mathbf{P}_i \mathbf{L}_i}_{\mathbf{N}_i}$$

$$\mathbf{M}_i \mathbf{x}' = \mathbf{N}_i$$

Vektor \mathbf{x}' tedy určíme z v tomto případě z každé skupiny zvlášť – tyto jednotlivě získané vektory označme \mathbf{x}'_i . Úkolem nyní je vypočítat vyrovnanou hodnotu vektoru \mathbf{x}' . Řešíme tedy systém rovnic

$$(4.4.16) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{x}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}'_n \end{pmatrix} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \vdots \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} \mathbf{x}'$$

spolu s váhovou maticí, která má v tomto případě kvazidiagonální tvar

$$(4.4.17) \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{\mathbf{x}'_1\mathbf{x}'_1}^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{Q}_{\mathbf{x}'_n\mathbf{x}'_n}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{M}_n \end{pmatrix}.$$

Tento model vede k normálním rovnicím

$$(4.4.18) \quad (\mathbf{E}, \dots, \mathbf{E})\mathbf{P}(\mathbf{E}, \dots, \mathbf{E})^T \mathbf{x}' = (\mathbf{E}, \dots, \mathbf{E})\mathbf{P}(\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_n)^T,$$

které můžeme dále upravovat

$$(4.4.19) \quad (\mathbf{E}, \dots, \mathbf{E}) \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{M}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \vdots \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} \mathbf{x}' = (\mathbf{E}, \dots, \mathbf{E}) \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{M}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}'_n \end{pmatrix}$$

$$\left(\sum_1^n \mathbf{M}_i \right) \mathbf{x}' = \sum_1^n \mathbf{M}_i \mathbf{x}'_i = \sum_1^n \mathbf{N}_i$$

až na konečný tvar

$$(4.4.20) \quad \mathbf{x}' = \frac{\sum_1^n \mathbf{N}_i}{\sum_1^n \mathbf{M}_i}.$$

Následuje opět výpočet jednotlivých \mathbf{x}_i podle rovnice (4.4.14).

1. i 2. postup výpočtu tedy vede ke stejným výsledkům.

4.4.4 3. způsob řešení

Řešíme rovnici (4.4.3). Po dosazení za opravy \mathbf{v}_i dostáváme tvar

$$(4.4.21) \quad \sum_{i=1}^n \left((\mathbf{A}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{A}'_i \mathbf{x}' + \mathbf{L}_i)^T \mathbf{P}_i (\mathbf{A}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{A}'_i \mathbf{x}' + \mathbf{L}_i) \right) = \min,$$

který derivujeme podle \mathbf{x}_i (získáme n rovnic)

$$(4.4.22) \quad \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}'_i \mathbf{x}' + \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{L}_i = \mathbf{0}$$

a také podle \mathbf{x}'

$$(4.4.23) \quad \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{A}_i'^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{A}_i'^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i' \mathbf{x}' + \mathbf{A}_i'^T \mathbf{P}_i \mathbf{L}_i \right) = \mathbf{0}.$$

Nyní opět z rovnic (4.4.22) vyjádřím \mathbf{x}_i a dosadím do (4.4.23). Získám tvar

$$(4.4.24) \quad \sum_{i=1}^n \left(-\mathbf{A}_i'^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i (\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i)^{-1} (\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i' \mathbf{x}' + \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{L}_i) + \mathbf{A}_i'^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i' \mathbf{x}' - \mathbf{A}_i'^T \mathbf{P}_i \mathbf{L}_i \right) = \mathbf{0}.$$

Tato rovnice je zjevně totožná s rovnicí (4.4.9) a další postup výpočtu je tedy stejný jako v odst. 4.4.2.

Ukázal jsem tedy, že všechny tři způsoby řešení reprezentované minimalizačními rovnicemi (4.1.1), (4.1.2) i (4.1.3), vedou ke stejnému řešení vyjádřenému rovnicí (4.4.11) pro vnější neznámé a dále rovnicemi (4.4.8) pro vnitřní neznámé.

4.4.5 Výpočet středních chyb

Nejprve spočítáme opravy z rovnic (4.4.1). Pak střední jednotkovou chybu

$$(4.4.25) \quad m_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{\sum n_i - \sum k_i - k'}},$$

kde je ve jmenovateli počet nadbytečných pozorování, který vyplývá z rozměru matice \mathbf{A} viz rovnice (4.3.1), samozřejmě za předpokladu, že měření jsou vzájemně nezávislá.

Z postupu výpočtu rovněž vyplývá určení váhových matic; váhová matice neznámých ve vektoru \mathbf{x}' je tedy

$$(4.4.26) \quad \mathbf{Q}_{\mathbf{x}'\mathbf{x}'} = \left(\sum \mathbf{M}_i \right)^{-1} = \left(\sum \left(\mathbf{A}_i'^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i' - \mathbf{A}_i'^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i (\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i)^{-1} \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i' \right) \right)^{-1}$$

a váhové matice neznámých ve vektorech \mathbf{x}_i jsou (bez odvození)

$$(4.4.27) \quad \mathbf{Q}_{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i} = \left(\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \right)^{-1} + \left(\mathbf{A}_i'^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i' \right)^{-1} \left(\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i' \right) \mathbf{Q}_{\mathbf{x}'\mathbf{x}'} \left(\mathbf{A}_i'^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \right) \left(\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \right)^{-1}.$$

Střední chyby neznámých ve vektorech \mathbf{x}' , \mathbf{x}_i se pak spočítají obvyklým způsobem.

5 Postupné vyrovnání

Mějme systém rovnic oprav pro vyrovnání zprostředkujících měření, který budeme nazývat původním. Předpokládejme dále, že známe řešení tohoto systému rovnic, tedy vyrovnané hodnoty neznámých a odhady jejich středních chyb. V této kapitole budeme řešit případy, kdy

1. k původnímu systému rovnic připojíme další rovnice oprav (přidání dalších měření) nebo
2. některé rovnice oprav z původního systému vypustíme.

Cílem této kapitoly je ukázat postup, jak vypočítat nové řešení bez nutnosti přepočítávat celý systém rovnic znovu. Úloha bude řešena tak, že k výsledným hodnotám neznámých a oprav původního systému budou připojeny pouze jejich změny.

Předpokládáme tedy klasické zadání vyrovnání zprostředkujících měření ve tvaru

$$(5.1.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{Ax} + \mathbf{L} &= \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} &= \min \end{aligned}$$

tento (původní) systém nechť má v souladu s běžným označením n zprostředkujících rovnic a k neznámých.

Nový systém rovnic, který z původního vznikne připojením, resp. vypuštěním nějakých rovnic oprav označíme

$$(5.1.2) \quad \mathbf{A}^* (\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - \mathbf{L}^* = \mathbf{v}^*, \quad \mathbf{P}^* .$$

Normální rovnice potom mají tvar

$$(5.1.3) \quad \mathbf{A}^{*T} \mathbf{P}^* \mathbf{A}^* (\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = \mathbf{A}^{*T} \mathbf{P}^* \mathbf{L}^* .$$

5.2 Připojení dalších rovnic oprav

K původnímu systému připojíme dalších Δn zprostředkujících rovnic. Získáme tak nový systém rovnic

$$(5.2.1) \quad \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \delta \mathbf{A} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{L} \\ \delta \mathbf{l} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{v} + \Delta \mathbf{v} \\ \delta \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \delta \mathbf{P} \end{pmatrix},$$

kde $\delta \mathbf{A}$ a $\delta \mathbf{l}$ vyjadřují nově připojené zprostředkující rovnice, $\delta \mathbf{v}$ opravy nově připojených zprostředkujících rovnic, $\delta \mathbf{P}$ váhovou matici nově připojených zprostředkujících rovnic a $\Delta \mathbf{v}$

vyjadřuje nutnou změnu oprav původních zprostředkujících rovnic v důsledku připojení nových měření. Opravu vektoru \mathbf{x} označíme $\Delta\mathbf{x}$. Po úpravách obdržíme vyjádření

$$(5.2.2) \quad \Delta\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}^T\delta\mathbf{P}\delta\mathbf{A})^{-1}\delta\mathbf{A}^T\delta\mathbf{P}(\delta\mathbf{L} - \delta\mathbf{A}\mathbf{x}).$$

Matrice, kterou je nyní třeba invertovat, má rozměr $k \times k$, tedy zdánlivě jsme řešení nezjednodušili. Existuje ovšem efektivnější přibližná metoda pro inverzi takovéto matice, která bude popsána v odst. 5.4

5.3 Vypuštění rovnic oprav

Tentokrát z původního systému Δn zprostředkujících rovnic vypustíme. Zapišeme nové schématické tvary matic

$$(5.3.1) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^* \\ \delta\mathbf{A} \end{pmatrix} \quad \mathbf{l} = \begin{pmatrix} \mathbf{l}^* \\ \delta\mathbf{l} \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}^* = \mathbf{v}' + \Delta\mathbf{v} \\ \delta\mathbf{v} \end{pmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \delta\mathbf{P} \end{pmatrix},$$

kde $\delta\mathbf{A}$ a $\delta\mathbf{l}$ vyjadřují úbytky původních matic, $\delta\mathbf{v}$ opravy původních zprostředkujících rovnic, které se v novém systému již nevyskytují, stejně tak $\delta\mathbf{P}$ vypuštěnou část váhové matice odpovídající vypuštěným zprostředkujícím rovnicím. $\Delta\mathbf{v}$ vyjadřuje změnu oprav zprostředkujících rovnic, které v systému zůstaly.

V tomto případě je nutné (oproti odst. 5.2) nejprve vyjádřit potřebné součiny nových matic (označených hvězdičkami). Ty vyjádříme pomocí vztahů (5.3.1)

$$(5.3.2) \quad \mathbf{A}^{*T}\mathbf{P}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A} - \delta\mathbf{A}^{*T}\delta\mathbf{P}\delta\mathbf{A}^* \quad \text{a}$$

$$(5.3.3) \quad \mathbf{A}^{*T}\mathbf{P}\mathbf{l}^* = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{l} - \delta\mathbf{A}^{*T}\delta\mathbf{P}\delta\mathbf{l}^*.$$

Dosazením do (5.1.3) a úpravami pak obdržíme tvar

$$(5.3.4) \quad \Delta\mathbf{x} = (-\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}^T\delta\mathbf{P}\delta\mathbf{A})^{-1}\delta\mathbf{A}^T\delta\mathbf{P}(\delta\mathbf{L} - \delta\mathbf{A}\mathbf{x}),$$

tedy až na znaménko u prvního členu v závorce stejné vyjádření jako v rovnici (5.2.2).

5.4 Inverze a výpočet neznámých

K výpočtu inverzní matice ve vztazích (5.2.2) nebo (5.3.4) lze využít přibližný výpočet, který poskytuje dostatečnou přesnost, pokud je počet připojovaných rovnic relativně malý proti počtu rovnic původního systému.

Označme

$$(5.4.1) \quad \mathbf{N} = \pm (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1},$$

kde znaménko + zavedeme v případě připojení nových rovnic, znaménko – naopak v případě, kdy některé rovnice ze systému vypouštíme. Potom podle [7, rov. 11] platí

$$(5.4.2) \quad \Delta \mathbf{x} = \left(\mathbf{N} - \mathbf{N} \delta \mathbf{A}^T (\delta \mathbf{P}^{-1} + \delta \mathbf{A} \mathbf{N} \delta \mathbf{A}^T)^{-1} \delta \mathbf{A} \mathbf{N} \right) \delta \mathbf{A}^T \delta \mathbf{P} (\delta \mathbf{L} - \delta \mathbf{A} \mathbf{x}).$$

Rozměr zde invertované matice je pouze $\Delta n \times \Delta n$. Jestliže tedy platí $\Delta n \ll k$, kde k je počet neznámých, potom je zde uvedený výpočet výpočetně výrazně jednodušší než počítání celého systému znovu.

5.5 Výpočet oprav a váhových koeficientů

5.5.1 Výpočet oprav při přidání rovnic

Při výpočtu nových oprav $\delta \mathbf{v}$ a změn původních oprav $\Delta \mathbf{v}$ pro případ přidání nových zprostředkujících rovnic vyjdeme ze vztahů (5.1.1) a (5.2.1). Dostaneme rovnice

$$(5.5.1) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{v} + \Delta \mathbf{v} \\ \delta \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \delta \mathbf{A} \end{pmatrix} (\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - \begin{pmatrix} \mathbf{L}^* \\ \delta \mathbf{L} \end{pmatrix}.$$

Po jednoduchých úpravách pak dostaneme konečné vztahy pro výpočet hodnot $\delta \mathbf{v}$, $\Delta \mathbf{v}$

$$(5.5.2) \quad \Delta \mathbf{v} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} \text{ a}$$

$$(5.5.3) \quad \delta \mathbf{v} = \delta \mathbf{A} (\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - \delta \mathbf{L}.$$

5.5.2 Výpočet oprav při odstranění rovnic

Dosadíme vztahy (5.3.1) do rovnice (5.1.1). Dostaneme

$$(5.5.4) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{v}' + \Delta \mathbf{v} \\ \delta \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^* \\ \delta \mathbf{A} \end{pmatrix} (\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) + \begin{pmatrix} \mathbf{L}^* \\ \delta \mathbf{L} \end{pmatrix}.$$

Po jednoduchých úpravách dostaneme vztah pro $\Delta \mathbf{v}$

$$(5.5.5) \quad \Delta \mathbf{v} = \mathbf{A}^* \Delta \mathbf{x},$$

hodnotu $\delta \mathbf{v}$ není třeba určovat, protože náleží vypuštěným měřením.

5.5.3 Výpočet váhových koeficientů

Nové váhové koeficienty nutné pro výpočet středních chyb leží na diagonále matice

$$(5.5.6) \quad \mathbf{N}^* = \left(\mathbf{A}^{*T} \mathbf{P}^* \mathbf{A}^* \right)^{-1}.$$

Stejně jako v odst. 5.4 lze pro inverzi této matice rovněž využít přibližný postup pro snížení náročnosti výpočtu a inverzní matice pak má tvar [7, rov. 14]

$$(5.5.7) \quad \pm \mathbf{N}^* = \left(\mathbf{N} - \mathbf{N} \delta \delta^T (\delta \mathbf{P}^{-1} + \delta \mathbf{A} \mathbf{N} \delta \mathbf{A}^T)^{-1} \delta \mathbf{A} \mathbf{N} \right),$$

kde znaménko + na levé straně rovnice dosadíme pro případ přidání nových rovnic a znaménko – pro případ odstranění rovnic z původního systému.

Následuje výpočet středních chyb běžným postupem.

6 Výpočetní program

Teorie uvedená v předchozích kapitolách má své uplatnění při řešení různých geodetických úloh. Jednou z běžných úloh řešených v geodézii je vyrovnání plošné sítě.

Pro vyrovnání plošných sítí existuje samozřejmě mnoho programů, většinou komerčních. Mají obvykle širokou možnost importu různých formátů dat, pokročilé statistické funkce pro vyhodnocování výsledků apod., avšak obvykle nebývá možné vyrovnání v blocích, postupné vyrovnání či vyrovnání s určováním neznámých parametrů. Proto jsem vytvořil sérii skriptů a funkcí v programu Matlab, které umožňují řešit plošné sítě, a to včetně aplikace poznatků z předchozích kapitol.

Nejedná se o plnohodnotný program s uživatelským rozhraním, který by byl schopný nahradit existující software pro vyrovnání sítí, vytvoření takového programu ostatně ani nebylo předmětem této diplomové práce. Jedná se však o skupinu skriptů, které mi umožnily efektivní testování různých způsobů vyrovnání, a to jak pro simulovaná, tak pro skutečná data.

6.1 Hlavní rysy programu

Program umožňuje zejména:

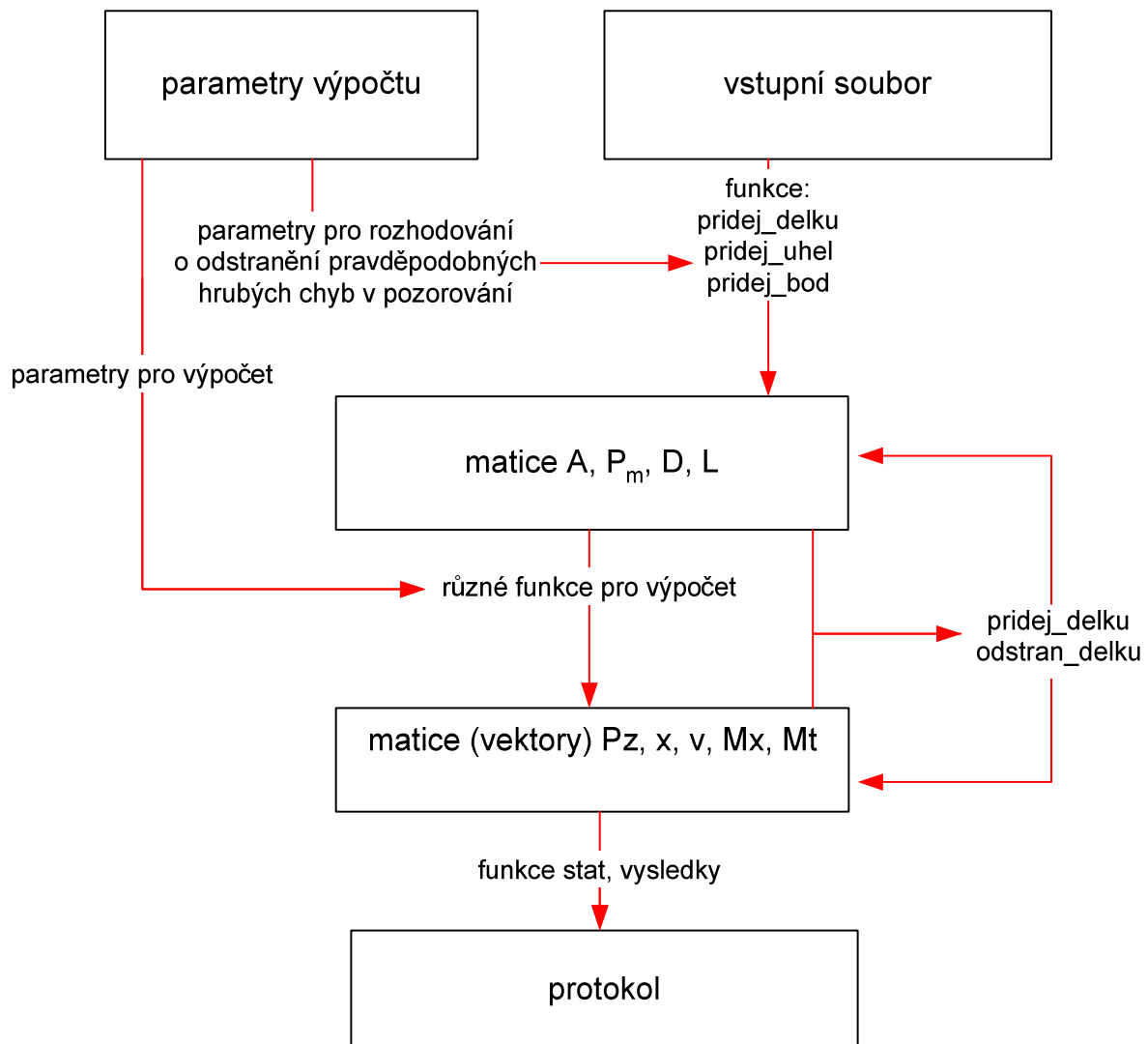
- vázané a volné vyrovnání
- postupné vyrovnání – přidávání a odstraňování měření (implementováno jen pro délky)
- vyrovnání v blocích
- různé způsoby matematického řešení soustavy normálních rovnic, resp. řešení MNC bez sestavení normálních rovnic
- v omezené míře vyrovnání s neznámými parametry

6.2 Vstupní data

Velmi výrazným programem pro vyrovnání účelových sítí je program GaMa. Tento program je vyvíjený na ČVUT pod GNU licenci, je tedy možné jej využívat zdarma. Abych nemusel vyvíjet vlastní formát vstupních dat, používám pro vstupní data formát programu GaMa. Je tak též možné porovnat mé výsledky s vyrovnáním v programu GaMa.

Pro výpočet vyrovnání zprostředkujících pozorování je dále nezbytné znát přibližné hodnoty hledaných souřadnic neznámých bodů. Můj program tyto přibližné hodnoty sám spočítat neumí – je nutné, aby byly zadány jako vstupní data, což použitý formát GKF umožňuje. Při praktických výpočtech jsem za přibližné hodnoty dosazoval přibližné hodnoty spočítané programem GaMa. To opět umožňuje lépe porovnat výsledky vyrovnání obou programů.

6.3 Princip fungování programu



Program pracuje v několika krocích

1. Nastavení parametrů výpočtu
2. Vstup dat ze souboru GKF a jejich uložení do speciálních matic uchovávajících informace o bodech a měřených a zprostředkujících veličinách

3. Podle nastavených parametrů výpočtu sestavení matic **A**, **P_m**, **D** a **L** (symbolika zde odpovídá symbolice uvedené v kap. 1)
4. Samotný výpočet – probíhá v opět v několika krocích, viz dále. Program umožňuje volit různé způsoby řešení úlohy ze zadaných matic.
5. Zápis protokolu o vyrovnání. Protokol o vyrovnání má podobnou strukturu jako protokol z programu GaMa
6. Jako poslední krok může následovat postupné vyrovnání – lze přidávat nová měření nebo je odstraňovat. Program pak okamžitě přepočítá vyrovnané souřadnice a jejich střední chyby.

6.4 Popis hlavních funkcí programu

6.4.1 Nastavení parametrů výpočtu

Nastavení parametrů výpočtu se provádí ve funkci `init.m`. Mezi hlavní možnosti nastavení patří:

- *práce s odhalenými hrubými chybami*

Pokud program při výpočtu narazí na měření, které výrazně překračuje hodnotu vypočítanou z přibližných souřadnic, vypíše varování a hodnotu podle nastavení buďto vynechá nebo přesto zahrne do výpočtu. Program rovněž umožňuje nastavit jak velký může být rozdíl, aby již byl považován za hrubou chybu, standardně je to 1 m pro délky a 0,1 g pro úhly.

- *výpočet volné sítě*

v programu lze nastavit, zda bude či nebude při výpočtu použita podmínka pro volné vyrovnání $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} + \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \min$.

- *typ sítě*

proměnná `typ_site` umožňuje nastavit, zda se bude síť vyrovnávat jako:

- *trilaterační*
- *triangulační* nebo
- *kombinovaná*.

V případě nastavení triangulační (resp. trilaterační) sítě budou měřené délky (resp. směry) při sestavování matic pro výpočet ignorovány.

6.4.2 Vstup dat

Pro vstup dat se používá formát GKF, jehož popis je uveden v [3]. Příklad vstupního souboru je uveden také v příloze A. Tento formát plně vyhovuje standardu XML (*Extensible Markup Language*) a Matlab jej umí automatizovaně zpracovávat pomocí technologie DOM (*Document Object Model*).

Tento program nepočítá přibližné souřadnice bodů, určované body tedy musí mít zadané přibližné souřadnice.

6.4.3 Sestavení matic

Na základě předzpracovaných vstupních dat program generuje matice **A**, **P_m**, **D** a **L**. K tomu využívá tři funkce:

- nejprve se zavolá funkce `pridej_bod` pro všechny body. Pokud se jedná o vyrovnání volné sítě, jsou všechny body považovány za neznámé a při přidání každého bodu se rozšiřuje matice **A** o dva sloupce (pro souřadnice x , y), jinak se matice rozšiřuje pouze pokud se jedná o bod určený k vyrovnání.
- pak se volají postupně funkce `pridej_delku` a `pridej_uhel`. Tyto funkce konstruují po řádcích matice **A**, **P_m**, **D** a **L**. Postup převodu měřených délek a směrů na zprostředkující délky a úhly je podrobně popsán v [6] a proto zde uvedu pouze základní princip konstrukce matic bez odvozování.

Při přidání jedné **měřené délky** se přidává nový zprostředkující parametr, kterým je rovněž délka. Matice **A** se tak rozšíří o jeden řádek vyjadřující vztah mezi zprostředkujícím parametrem a hledanými neznámými opravami souřadnic. Pokud se jedná o délku měřenou mezi dvěma neznámými body, má přidáný řádek vždy 4 nenulové hodnoty ve sloupcích, které odpovídají hledaným opravám souřadnicových rozdílů dx , dy obou bodů. Tyto nenulové hodnoty jsou tzv. *stranové součinitele*. Na následujícím nákresu je schématicky naznačeno rozšíření matice **A**, **D**, **L** a **P_m** o zprostředkující veličinu, kterou je měřená délka mezi dvěma body sítě. Nové matice jsou označeny hvězdičkami, měřená délka má velikost l a váhu p_l . Příklad je uveden pro 5 neznámých bodů, x_0 a y_0 jsou jejich přibližné souřadnice.

jakožto i tvar matic \mathbf{L} jsou podrobně uvedeny v [6]. Matice \mathbf{P}_m se rozšíří o n řádků a n sloupců, na diagonále matice přibudou váhy měřených směrů.

6.4.4 Výpočet

Postup výpočtu byl převzat z [6] a lze jej rozdělit na několik částí (první tři body jsou rovněž odvozeny v kap. 1 této práce):

1. Výpočet matice vah zprostředkujících parametrů \mathbf{P}_z

$$\mathbf{P}_z = (\mathbf{D}\mathbf{P}_m^{-1}\mathbf{D}^T)^{-1}$$

2. Výpočet hledaných neznámých \mathbf{x} (vektoru oprav přibližných souřadnic vyrovnávaných bodů) řešením normálních rovnic

$$\mathbf{x} = -(\mathbf{A}^T\mathbf{P}_z\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{L}.$$

Program umožňuje několik variant numerického řešení této rovnice. Stručně budou zmíněny v kap. 8.

3. Výpočet oprav zprostředkujících a měřených hodnot

$$\mathbf{v}_z = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{L}$$

$$\mathbf{v}_m = \mathbf{P}_m^{-1}\mathbf{D}^T\mathbf{P}_z\mathbf{v}_z$$

4. Výpočet charakteristik přesnosti.

- Nejprve je nutné spočítat aposteriorní jednotkovou střední chybu

$$m_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}_z^T\mathbf{P}_z\mathbf{v}_z}{n'}},$$

kde n' značí počet nadbytečných měření.

- Následuje výpočet kovarianční matice hledaných neznámých a kovarianční matice měřených veličin podle vztahů

$$\mathbf{M}_x = m_0^2 (\mathbf{A}^T\mathbf{P}_z\mathbf{A})^{-1}$$

$$\mathbf{M}_t = m_0^2 \left(\mathbf{E} - \mathbf{P}_m^{-1}\mathbf{D}^T\mathbf{P}_z \left(\mathbf{E} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{P}_z\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}_z \right) \mathbf{D} \right) \mathbf{P}_m^{-1}.$$

Následuje výpočet odhadu střední chyby vyrovnaných souřadnic a odhadu střední chyby měřených veličin

$$\begin{aligned} m_x^2 &= M_{x_{ii}} \\ m_t^2 &= M_{t_{ii}} \end{aligned},$$

kde $M_{x_{ii}}, M_{t_{ii}}$ jsou prvky na hlavní diagonále matic $\mathbf{M}_x, \mathbf{M}_t$

- Program pak počítá odhady střední polohovou chybu a střední souřadnicové chyby jednotlivých bodů podle vzorců

$$m_p = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$$

$$m_{xy} = \sqrt{0,5(m_x^2 + m_y^2)}$$

kde m_x, m_y jsou střední chyby vyrovnaných souřadnic x, y daného bodu

- Program dále počítá tzv. střední elipsy chyb jednotlivých bodů podle postupu uvedeného v [3]

5. Statistické hodnocení výsledků

Opravy měřených veličin nejsou obecně vzájemně nezávislé a jejich rozdělení tedy nemusí odpovídat normálnímu rozdělení pravděpodobnosti. Proto podobně jako v [3] počítám tzv. homogenizované opravy měřených veličin podle vztahu

$$\tilde{v} = v_m \sqrt{P_{m_{ii}} - \frac{M_{t_{ii}}}{m_0^2}},$$

kde dolní indexy ii označují příslušné prvky na diagonálách matic \mathbf{P}_m a \mathbf{M}_t . Homogenizované opravy již mají normální rozdělení, zbývá ještě převést je na tzv. standardizované opravy

$$v = \frac{\tilde{v} - E(\tilde{v})}{\sqrt{V(\tilde{v})}}.$$

Tyto opravy by měly mít rozdělení $N(0,1)$. To program kontroluje pomocí Kolmogorovova-Smirnovova testu. Také počítá koeficient špičatosti souboru standardizovaných oprav a testuje zda odpovídá očekávané hodnotě (viz odst. 1.6.4). Pro Kolmogorovovův-Smirnovův test využívám standardní funkci Matlabu.

Posledním testem, který program provádí, je test poměru apriorní a aposteriorní jednotkové střední chyby popsány v kap. 1.5.

6.4.5 Výpis protokolu

Po výpočtu program vypíše protokol do souboru. Protokol má podobnou strukturu jako protokol generovaný programem GaMa a je tak možné porovnání výsledků vyrovnaní.

Příklad protokolu pro zkušební data je v příloze A, zkrácený protokol vyrovnání sítě v Nečtinech (viz kap. 7) je uveden v příloze B.

6.4.6 Postupné vyrovnání

Program umožňuje postupné vyrovnání (pouze však pro měřené délky), a to přidání nové měřené délky a odebrání měřené délky. Problematika odstranění měřeného směru je složitější a zatím nebyla implementována.

Postup přidání nového řádku je obdobný jako při přidávání nové délky před vyrovnáním, avšak po přidání následuje přepočítání soustavy podle vztahů teoreticky odvozených v kap. 5 namísto počítání celého systému znovu. Při odstraňování je situace jednodušší, stačí odstranit řádky z příslušných matic a opět provést výpočet podle vztahů uvedených v kap. 5.

7 Příklad použití programu - vyrovnání plošné sítě „Nečtiny“

Teoretické postupy uvedené v předchozích kapitolách a program pro vyrovnání plošných sítí popsány v předchozí kapitole jsem použil vyrovnání plošné sítě v Nečtinech. Charakter této sítě umožňuje testovat většinu poznatků z předchozích kapitol.

Cílem této kapitoly je ukázat funkčnost programu a použití jednotlivých způsobů vyrovnání. Cílem nebylo co možná nejpřesnější vyrovnání této sítě, a proto byla věnována jen částečná pozornost správné volbě vah jednotlivých měření a detailnímu rozboru odlehklých pozorování. Tyto velmi důležité části každého vyrovnání byly provedeny jen v míře nezbytné pro dosažení stanoveného účelu, kterým je demonstrace způsobů vyrovnání (a až v druhé řadě samotné výsledky).

7.1 Plošná síť „Nečtiny“

Na zámečku v Nečtinech má Západočeská univerzita výcvikové středisko, ve kterém se každoročně koná geodetický kurz pro studenty oboru geomatika. Tento kurz zatím proběhl v letech 2000 až 2003. V rámci těchto kurzů byla vybudována a stabilizována síť bodů podrobného polohového bodového pole, která čítá v současné době kolem 40 bodů. V síti jsou rovněž dva observační pilíře s nucenou centrací. Součástí vyrovnávané sítě jsou dále i pomocné body, které nebyly stabilizovány, ale pouze účelově použity v jednotlivých letech při měření. Síť zhušťuje základní polohové bodové pole v okolí Nečtin, které čítá přibližně 10 bodů.

7.2 Měření v síti „Nečtiny“

Zhuštění podrobného polohového bodového pole bylo prováděno zejména observacemi ze známých i neznámých bodů (měření ve více skupinách) a vedením polygonových pořadů. Pro vyrovnání polygonového pořadu metodou nejmenších čtverců samozřejmě existují speciální postupy, viz např. [6]. Protože se však v této síti mnoho polygonových pořadů kříží a zároveň bylo na mnoha bodech těchto polygonových pořadů observováno, je možné vyrovnání všech měření dohromady jako plošné sítě.

Již nyní je však nutné podotknout, že rozložení počtu měření na jednotlivé body sítě je velmi nerovnoměrné. Na některých bodech bylo i opakovaně observováno, přes jiné byl veden

například pouze jeden polygonový pořad. Toto způsobuje jistou nehomogenost vstupních dat. Dalším negativním vlivem působícím na přesnost dosažených výsledků bude bezesporu to, že síť zaměřovalo mnoho různých měřičů – studentů, z nichž mnozí neměli prakticky žádné předchozí zkušenosti s měřením. V měření se tak mohou vyskytovat hrubé chyby a omyly, kterých by se zkušenější měřiči nedopustili.

Příkladem takového omylu, který mohl výrazně zkreslit výsledek vyrovnání, ale který byl v průběhu výpočtu odhalen, je že některé měřické skupiny při přehrávání měření zapnuly funkci, která automaticky provádí redukce měřených délek na nulový horizont, z nadmořské výšky a ze zobrazení při přehrávání zápisníku z totální stanice do počítače, přestože instrukce zněly, že se redukce budou provádět až při následném počítačovém zpracování. Navíc při předávání dat v některých případech odstranili hlavičku souboru, která obsahovala informaci o tom, že měřené délky již jsou redukovány. Tuto chybu se podařilo odstranit pomocí analýzy odlehlých pozorování u dlouhých záměr.

Z výše uvedeného vyplývá, že nelze očekávat oslnivě přesné výsledky vyrovnání. Pro uvedený účel, kterým je vyzkoušet různé druhy vyrovnání na prakticky naměřených datech, však není absolutní přesnost výsledku až tak podstatná, předmětem zkoumání je spíše výpočet sám než výsledná data.

Všechna měření byla provedena totální stanicí Topcon GTS-710. Výrobce uvádí přesnost této stanice při měření směrů 0,2 mgon, při měření délek potom 2mm + 2ppm.

7.3 Úprava měřených hodnot před vyrovnáním

Měřené šikmé délky je nutné před vyrovnáním redukovat. Redukci jsem provedl programem `zpracmer`, kterým jsem převáděl vstupní data z formátu MAPA 2 do formátu GKF. Program provádí redukci délek

- z šikmých na vodorovné: měřené byly šikmé délky a zenitové úhly, redukce na vodorovné délky je dána vztahem

$$(7.3.1) \quad s' = s \sin z$$

kde s je měřená šikmá délka, z měřený zenitový úhel a s' vodorovná délka

- z nadmořské výšky: pro opravu délek z nadmořské výšky bylo použita konstantní výška odpovídající zhruba průměrné nadmořské výšce (540 m).

$$(7.3.2) \quad s_0 = s' \left(1 - \frac{h}{R} \right) = s' \left(1 - \frac{540}{6378000} \right) = 0,999915s'$$

Zde je nutné upozornit, že pokud bych chtěl získat vyrovnáním co nejpřesnější výsledky, bylo by nutné tuto jednoduchou redukci nahradit přesnější (uvažující přesnou výšku obou bodů). Přesně redukované délky by se lišily v řádu milimetrů od těchto přibližně redukovaných. Pro účel této práce tato redukce stačí.

- ze zobrazení: z tabulek lze obvyklým postupem najít koeficient zkreslení pro danou lokalitu

$$(7.3.3) \quad S = 0,999916s_0$$

Celkový vliv redukce na délku o velikosti 1000 m tak činí

$$(7.3.4) \quad \Delta s = 1000 - 0,999916 * 0,999915 * 1000 = 0,169 \text{ m}$$

Je zřejmé, že takto velké redukce není v žádném případě možné zanedbat. Jak jsem již uvedl výše, některé zápisníky již měly délky redukované. Z hlaviček zápisníků vyplývá, že byly redukované o hodnotu 169 mm / km, tedy přesně o stejnou hodnotu, kterou jsem spočítal v této podkapitole.

7.4 Volba vah měřených veličin a apriorní střední chyby

Volba vah, jak bylo popsáno výše, závisí na poměru jednotkových středních chyb. Protože mám k dispozici relativně velký soubor měření, mohl jsem spočítat apriorní střední chyby z něj. Na jejich základě pak spočítám váhy měřených délek a měřených směrů.

Pro výpočet jednotkové střední chyby měřeného směru jsem vybral bod, na kterém bylo měřeno v průběhu všech 4 let ve více skupinách. Z tohoto pohledu vyšel nejlépe bod č. 912202020, ze kterého bylo měřeno v celkem 15 skupinách. Počet společných směrů je 4 (v jednotlivých letech bylo navíc měřeno na různé další směry, ty jsem se však rozhodl do výpočtu nezahrnout, takto tvoří data jednotný celek).

Po vyrovnání této osnovy směrů měřené v 15 skupinách jsem spočítal jednotkovou střední chybu měřeného směru podle vztahu

$$(7.4.1) \quad m_{\psi 0} = \sqrt{\frac{\sum v v}{(s-1)(n-1)}}$$

kde v značí opravu měřeného směru proti průměru ze všech skupin, s počet směrů a n počet skupin.

Jednotková střední chyba měřeného směru vyšla 0.0022 g. Tato hodnota se zdá být velmi vysoká, uvážíme-li přesnost použitého teodolitu. Výpočtem na jiných bodech, na kterých bylo měřeno ve více letech v mnoha skupinách však dojdeme k velmi podobným výsledkům. Příčiny takto velké střední chyby lze spatřovat zejména v tom, že tato chyba nepostihuje pouze vnitřní přesnost měření, jak by to bylo pokud by se skupiny měřily těsně za sebou, ale i další možné vlivy způsobené tím, že je jedná o společné zpracování měření pořízené v různých dnech (a dokonce i letech): chyby z centrace a horizontce stroje nebo cílů, různé atmosférické podmínky působící na měření, navíc tyto vlivy mohou být umocněny relativní nezkušeností obsluhy. Kontrolní výpočty, které jsem pro jistotu provedl, této střední chyby z jiných bodů na nichž bylo rovněž observováno ve více dnech (příp. letech) a více skupinách vykazují obdobné výsledky.

Jednotková střední chyba měřené délky byla rovněž určena z měření mezi dvěma body, tentokrát mezi body 5001 a 5002, mezi kterými bylo provedeno celkem 26 měření během 3 let. Jednotková střední chyba měřené délky se spočítá podle vzorce

$$(7.4.2) \quad m_{s0} = \sqrt{\frac{\sum vv}{n-1}},$$

kde v značí opravu měřené délky proti průměr ze všech délek a n počet měřených délek.

Jednotková střední chyba měřené délky určená podle tohoto vztahu vyšla (po zaokrouhlení) 6 mm. Při kontrolních výpočtech mezi jinými body, mezi nimiž bylo rovněž provedeno mnoho opakovaných měření v různých dnech, vychází různé hodnoty střední chyby od 4 mm do 6 mm. Pokud by bylo cílem této práce co nejpřesnější vyrovnání sítě v Nečtinech, bylo by nutné věnovat středním chybám měřených délek větší pozornost, zejm. jejich závislosti na vzdálenosti. Pro účely této práce však postačí přibližné hodnoty středních chyb. Jednotkovou střední chybu měřené délky jsem tedy odhadl na 6 mm a navíc ji považuji za nezávislou na vzdálenosti. Lze očekávat, že se toto zjednodušení projeví při statistické analýze výsledků vyrovnání.

Jako apriorní jednotkovou střední chybu pro vyrovnání jsem zvolil právě jednotkovou střední chybu měřené délky, váhy měřených délek jsou tak rovny 1 a zbývá určit váhy měřených směrů ze vztahu

$$(7.4.3) \quad p_s m_{s0}^2 = p_\psi m_{\psi 0}^2$$

a po dosazení vyjde přibližně hodnota

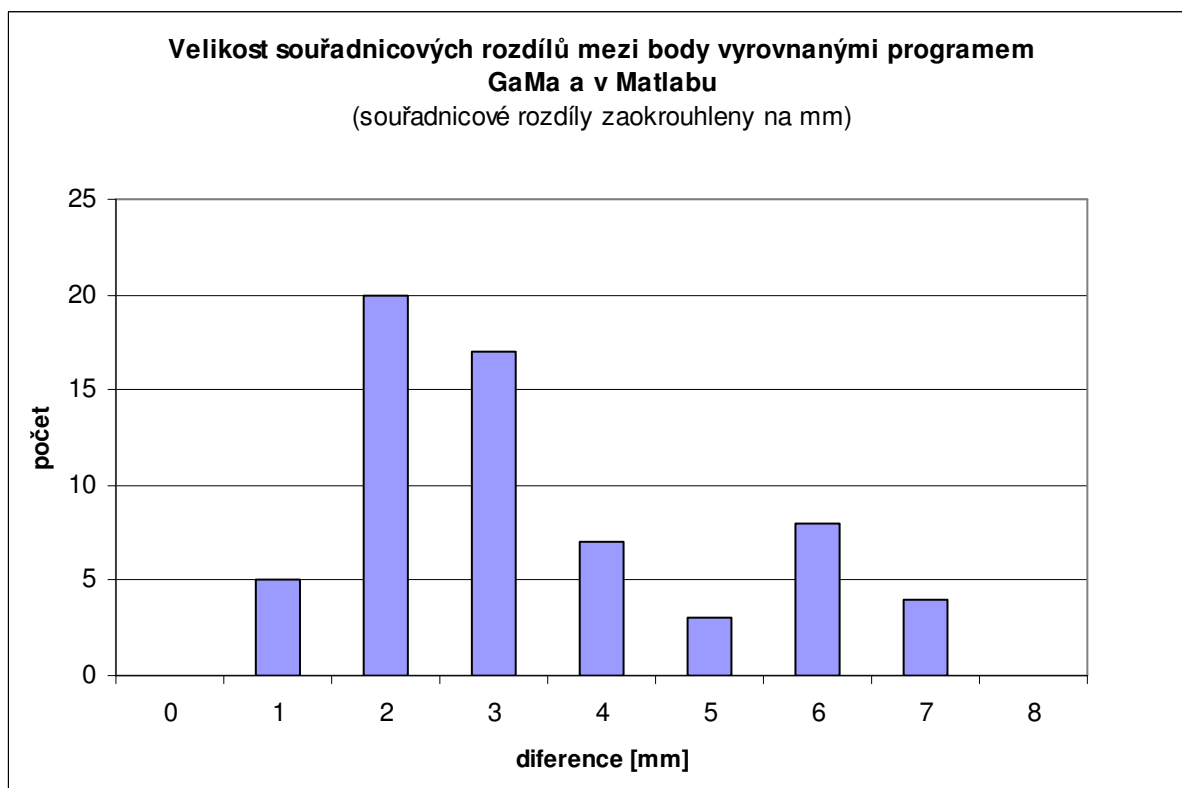
$$(7.4.4) \quad p_\psi = \frac{0,006^2}{0,0022^2} \cong 7,5.$$

7.5 Výsledky vyrovnání

Síť v Nečtinech byla vyrovnána několika způsoby. Ty budou nyní uvedeny včetně základních výsledků. Výstupem každého vyrovnání je protokol (jak je popsáno výše), velikost protokolu je však vzhledem k počtu neznámých a měření příliš velká a tak budou uváděny jen významné výsledky. Kompletní protokoly jsou pak na příloženém CD.

7.6 Vyrovnání vázané sítě

Je základním způsobem vyrovnání takovéto sítě. Výpočet jsem provedl jak v mém programu v Matlabu, tak v programu GaMa. Vzhledem k počtu bodů v síti jsem shrnul difference mezi body vyrovnanými v programu GaMa a v mém programu do grafu:



Z grafu je patrné, že oba programy došly k podobným výsledkům vyrovnání, maximální rozdíl v poloze vyrovnaných bodů je 8,44 mm. Tento rozdíl bude velmi pravděpodobně způsoben trošku jiným způsobem sestavování zprostředkujících rovnic programem GaMa. Program GaMa používá podle [3] jako zprostředkující parametr kromě úhlů a délek i tzv. vnější určující směrník (podrobněji v [6]), který já pro vyrovnání nepoužívám (téměř vždy je možné jej nahradit právě vyrovnávaným úhlem).

7.6.1 Přesnost vyrovnání vázané sítě

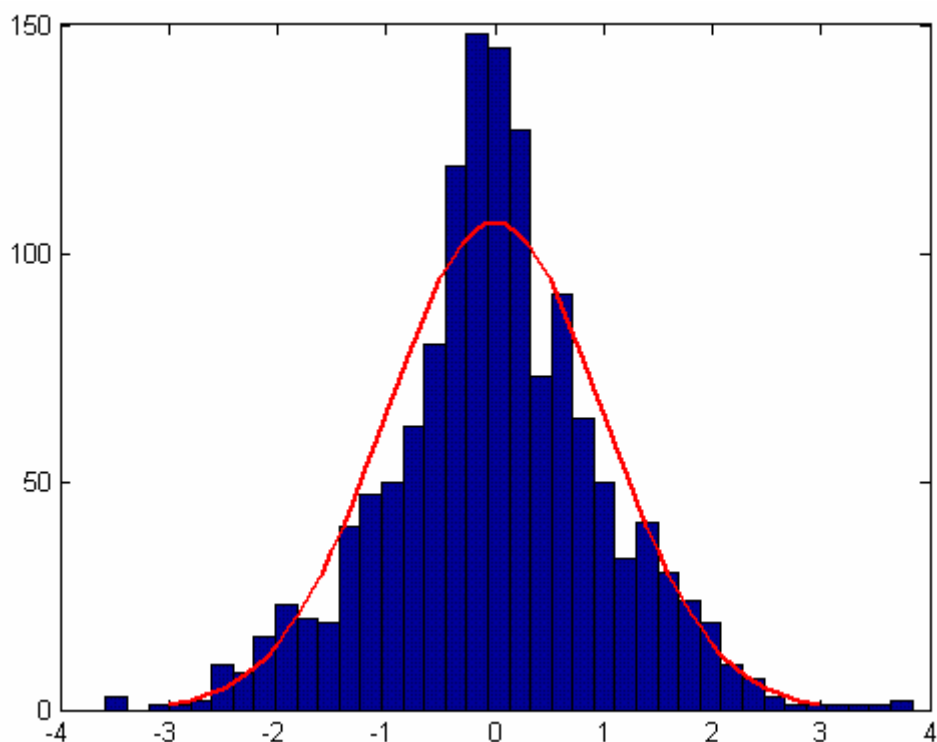
Charakteristikou přesnosti jsou střední souřadnicová chyba, střední polohová chyba a střední elipsa chyb. Jejich spočítané hodnoty jsou uvedené v příloze B. Zde uvedu pouze dvě hodnoty:

- průměrná střední polohová chyba je 4,1 mm
- maximální střední polohová chyba je 8,3 mm

7.6.2 Statistické hodnocení

Při statistické analýze program pracoval s hladinou významnosti 95 %. Výsledky statistické analýzy jsou uvedeny na konci přílohy B, zde pouze shrnu nejdůležitější výsledky:

- hypotéza o rovnosti apriorní a aposteriorní střední kvadratické chyby nebyla zamítnuta
- naopak Kolmogorovův-Smirnovův test normality standardizovaných oprav nevyšel
- podle výsledku testu koeficientu špičatosti, který ukazuje, že rozdělení standardizovaných oprav je špičatější než normální rozdělení, lze usoudit (a ostatně to bylo i předvídáno), že se nejedná o výběr z jednoho základního souboru, a tedy že patrně nebyly vhodně zvoleny váhy.



Přestože test normality homogenizovaných oprav nevyšel, z histogramu je vidět, že se rozdělení standardizovaných oprav přimyká k zobrazené Gaussově křivce. Je názorně vidět i vyšší špičatost rozdělení standardizovaných oprav proti normálnímu rozdělení pravděpodobnosti. Při sofistikovanější volbě vah by bylo patrně možné docílit přesnějšího vyrovnání, což však není předmětem této práce.

Protože následující způsoby vyrovnání pracují se stejnými daty a liší se pouze způsob výpočtu, nebudu již uvádět přesnost vyrovnání a statistické hodnocení, pokud se nebude významně lišit od hodnot uvedených v odstavcích této podkapitoly.

7.7 Vyrovnání volné sítě

Program umožňuje vyrovnání volné sítě oběma způsoby uvedenými v kapitole 3. Tento způsob výpočtu vyrovnání účelových sítí je ale vhodný je zejména tam, kde je přesnost vztažných bodů nižší, než přesnost zaměření samotné sítě. Protože účelem vybudování plošné sítě v Nečtinech je zhuštění základního polohového bodového pole, neodpovídá volné vyrovnání smyslu této sítě. Opravy totiž získají i body základního polohového bodového pole. To však nebrání testování tohoto způsobu vyrovnání na síti v Nečtinech.

7.7.1 Vyrovnání s podmínkou $v^T P v + x^T x = \min$

Již z principu tohoto vyrovnání, které vedle podmínky MNC $v^T P v = \min$ minimalizuje ještě kvadráty oprav všech souřadnic vyplývá, že není pro účely vyrovnání podobné sítě vhodné. Všechny body budou do vyrovnání vstupovat jako určené vyrovnávané a zcela se tím smaže rozdíl mezi přesností přibližných hodnot bodů ZBPB a měřených bodů PPBP. Uvádím zde tabulku oprav, které bodům ZBPB přisoudil tento způsob volného vyrovnání, přestože jeho smysl je sporný.

	dx	dy	dp
912202020	-0.0022	-0.0034	0.0041
912202220	0.0104	0.0031	0.0108
912202230	0.0059	0.0107	0.0122
912202301	0.0290	0.0073	0.0299
912202300	-0.0017	-0.0051	0.0054
912202310	-0.0050	0.0001	0.0050

7.7.2 Vyrovnání zprostředkujících spolu s podmínkami

Je pro volné vyrovnání účelové sítě vhodnou metodou. Přesto však bude tato metoda přidělovat bodům základního bodového pole jisté opravy, což vyplývá z její podstaty. V tabulce uvádím opravy bodů ZBPB, které po vyrovnání tyto body dostaly. Při volném vyrovnání bylo záměrně vynecháno několik bodů ZBPB, na které bylo měřeno a které byly užity při vyrovnání vázané sítě, které jsou ale od samotné sítě relativně velmi vzdálené. Důvodem je, že volné vyrovnání těmto bodům přisuzuje nerealisticky velké opravy (až desítky centimetrů). I nepatrné natočení volné sítě pak může u těchto bodů způsobit velké opravy souřadnic.

	dx	dy	dp
912202020	0.0064	-0.0033	0.0072
912202220	0.0029	-0.0246	0.0248
912202230	-0.0161	0.0131	0.0208
912202301	0.0287	0.0134	0.0317
912202300	0.0031	-0.0108	0.0112
912202310	-0.0249	0.0121	0.0277

Vidíme, že se náš předpoklad potvrdil – body ZBPB byly „posunuty“ až o 3 centimetry, což by nemělo odpovídat jejich kvalitě (základní střední souřadnicová chyba bodů ZBPB nesmí překročit 1,5 cm).

7.8 Vyrovnaní v blocích

Síť „Nečtiny“ byla zaměřována postupně v letech 2000-2003. Na některých bodech bylo měřeno opakovaně, na většině z nich bylo však měřeno pouze v 1 roce. Tato vlastnost sítě umožňuje body v síti na 5 skupin a použít vyrovnaní v blocích, které by mělo přinést zefektivnění výpočtu.

rok	počet bodů (k/2)	počet měření (m)	počet zprostředkujících (n)
2000	3	122	102
2001	13	179	150
2002	16	592	494
2003	14	480	413
ve více letech	21		
celkem	67	1373	1159

Z tabulky lze vidět, že dojde ke snížení velikosti největších invertovaných matic o více než polovinu. Vzhledem k tomu, že náročnost výpočtu inverzní matice neroste s její velikostí lineárně, ale v nejhorším případě až s třetí mocninou, lze očekávat zefektivnění výpočtu při zachování kvality vyrovnaní. Zhodnocení dosažených výsledků bude uvedeno v následující kapitole.

7.9 Postupné vyrovnaní

Postupné vyrovnaní není samostatným způsobem vyrovnaní, ale dalším krokem po celkovém vyrovnaní sítě. Můj program umožňuje výpočet vyrovnaných hodnot různými matematickými metodami, pro použití postupného vyrovnaní tak, jak bylo popsáno v kapitole 5 je však nutné volit výpočet normálních rovnic inverzí.

Postupné vyrovnaní se hodí například pro odstranění odlehlých pozorování po vyrovnaní. Tak jsem také použití postupného vyrovnaní testoval, jak je podrobněji uvedeno v odst. 8.1.2.

8 Hodnocení různých způsobů výpočtu

8.1 Hodnocení přesnosti

Přesností rozumíme v tomto odstavci vliv způsobu různých vyrovnání na jeho výsledek při stejných vstupních datech. Nejedná se tedy o kvalitativní hodnocení výsledku, ale hodnocení kvality metody. V tomto smyslu lze srovnat následující výše popsané způsoby vyrovnání:

- vyrovnání celé sítě a vyrovnání v blocích
- vyrovnání celé sítě znovu proti postupnému vyrovnání
- různé způsoby řešení normálních rovnic implementované v programu

8.1.1 Vyrovnání celé sítě a vyrovnání v blocích

Vzhledem k tomu že se jedná o teoreticky stejně přesné výpočty, bylo možné očekávat, že výsledky budou naprosto identické.

To se potvrdilo i výpočtem, oba vektory neznámých oprav souřadnic x byly naprosto stejné, neprojevil se dokonce ani minimální vliv zaokrouhlovacích chyb.

8.1.2 Vyrovnání celé sítě znovu proti postupnému vyrovnání

Postupné vyrovnání je pouze přibližnou metodou výpočtu, jak bylo uvedeno v kapitole 5. Vhodné užití této metody je pro přepočítání systému po odstranění odlehlých pozorování. Postupné vyrovnání jsem testoval tak, že jsem spočítal celý systém přesnou metodou, poté jsem odstranil 10 pozorování způsobem postupného vyrovnání a kontrolně jsme spočítal celý systém znovu bez vypuštěných pozorování a ověřil difference vyrovnaných souřadnic oběma způsoby. Poté jsem odstraňoval dalších 10 pozorování.

Celkem jsem odstranil 100 pozorování (z celkového počtu kolem 1300). Rozdíl v souřadnicích ani po odstranění 100 pozorování nebyl nijak významný – difference ve všech kontrolních výpočtech nepřekračovaly hodnotu 10^{-14} m, což je pro potřeby vyrovnání sítě přesnost naprosto vyhovující.

Přestože nelze tento závěr zobecnit na všechny případy, lze konstatovat, že postupné vyrovnání je pro účel přepočítání systému po přidání nebo odstranění malého počtu rovnic zřejmě ideální metodou.

8.1.3 Různé způsoby řešení normálních rovnic

Program umožňuje použít k řešení soustavy normálních rovnic různé algoritmy, či dokonce řešit úlohu vyrovnání bez sestavování normálních rovnic. Všechny použité algoritmy však vždy vedly ke stejným výsledkům, neprojevil se vliv zaokrouhlovacích ani žádných jiných chyb.

8.2 Hodnocení rychlosti výpočtu

Chceme-li zefektivnit rychlost výpočtu plošné sítě, máme 2 základní možnosti:

- Použít vyrovnání v blocích, je-li možné síť na bloky rozdělit
- Použít postupné vyrovnání, pokud jsme síť již vyrovnávali a nová síť se liší od staré pouze připojením či odebráním relativně malého počtu zprostředkujících rovnic
- Využít efektivní prostředky numerické matematiky pro řešení vyrovnání MNČ

První dva body jsem již zmínil. Při sestavování mého programu pro řešení úlohy vyrovnání jsem se snažil využít možností, které Matlab pro řešení rovnic nabízí. Nakonec program umožňuje řešení soustavy $\mathbf{Ax} + \mathbf{L} = \mathbf{v}$ těmito způsoby

- řešení normálních rovnic inverzí
- řešení normálních rovnic pomocí operátoru \backslash (implementace LU rozkladu)
- řešení přeuredené soustavy $\mathbf{Ax} + \mathbf{L} = \mathbf{v}$ bez sestavování normálních rovnic QR rozkladem
- navíc lze využít speciálních vlastností matic \mathbf{A} , \mathbf{P}_z , \mathbf{P}_m , a \mathbf{D}

Popis těchto způsobů řešení rovnic a také všech rozkladů matic použitých v této kapitole lze nalézt např. v [10].

8.2.1 Řešení normálních rovnic inverzí

Jedná se o klasický způsob řešení soustavy rovnic. Řešení vyjádříme ve známém tvaru

$$(8.2.1) \quad \mathbf{x} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{P}_z \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_z \mathbf{L}.$$

V Matlabu řeším inverzi pomocí funkce `inv()`.

8.2.2 Řešení normálních rovnic pomocí speciálního operátoru

V Matlabu je pro řešení soustav lineárních rovnic speciální operátor, který volí optimální způsob řešení soustavy podle vlastností matic. Podle popisu v nápovědě k programu Matlab lze říci, že pro případ řešení soustavy normálních rovnic použije Matlab LU rozklad. Použití tohoto operátoru namísto výpočtu inverze je rychlejší a při špatně podmíněné matici soustavy normálních rovnic poskytuje výrazně přesnější výsledky. Jak jsem však již uvedl v odst. 8.1.3, při řešení sítě „Nečtiny“ neměl vliv použitého algoritmu na přesnost výsledku žádný vliv.

8.2.3 Řešení úlohy vyrovnání bez sestavování normálních rovnic

Matlab umožňuje dokonce přímo řešit přeuredenou rovnici

$$(8.2.2) \quad \mathbf{Ax} + \mathbf{L} = \mathbf{v}, \mathbf{v}^T \mathbf{v} = \min$$

a to bez sestavování normálních rovnic. Používá k tomu algoritmus QR rozkladu (další možnosti řešení je rovněž tzv. SVD rozklad). Neumí však dobře řešit soustavu

$$(8.2.3) \quad \mathbf{Ax} + \mathbf{L} = \mathbf{v}, \mathbf{v}^T \mathbf{Pv} = \min .$$

Proto je nutné soustavu (8.2.3) převést na soustavu (8.2.2) – homogenizovat ji. Homogenizovaná soustava má tvar

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{L}} = \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{v}}^T \tilde{\mathbf{v}} = \min$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{1/2} \mathbf{A}$$

$$\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{P}^{1/2} \mathbf{L}$$

Pokud je matice \mathbf{P} diagonální, matice $\tilde{\mathbf{P}}$ má na hlavní diagonále odmocniny prvků z diagonály matice \mathbf{P} . V opačném případě se jedná o choleského rozklad matice \mathbf{P} .

Po homogenizaci systému lze tedy využít silné numerické nástroje Matlabu pro přímé řešení přeuredené soustavy rovnic.

8.2.4 Využití speciálních vlastností matic

Této možnosti lze využít v případě nekorelovaných měření, tedy v případě, kdy matice vah měřených veličin je diagonální. Tyto případy v praxi nastávají poměrně často. Do určité míry by šel tento postup použít i při slabě korelovaných měřeních.

Předpokládejme tedy, že matice \mathbf{P}_m je diagonální. Jedná se tedy o tzv. řídkou matici – matici, jejíž převážná většina prvků je nulová.

Totéž lze říci i o matici **D**. Z její konstrukce víme, že pro náš případ vyrovnání obsahuje na každém řádku jednu (v případě délek) nebo dvě (v případě úhlů) nenulových hodnot. Ostatní hodnoty jsou nulové.

Rovněž matici **A** lze považovat za matici řídkou, protože obsahuje na každém řádku nejvýše 6 nenulových hodnot, což opět plyne z principu její konstrukce (odst. 6.4.3).

Lze ukázat, že když jsou řídké matice **P_m** a **D**, bude řídká i matice **P_z**, která vznikne jejich násobením.

Program Matlab umožňuje speciální práci s řídkými maticemi. Neukládá je ve formě pole, ale uchovává pouze jejich nenulové hodnoty. Rovněž pro výpočty s řídkými maticemi, jako je inverze nebo QR rozklad, používá speciální algoritmy.

Pro případ vyrovnání sítě v Nečtinech jsem shrnul rozměry jednotlivých matic a počet jejich nenulových prvků do následující tabulky:

matice	rozměr	počet prvků	max. nenulových prvků	zaplnění v proc.
A	[1159, 134]	155306	6954	4.4776
P_m	[1373, 1373]	1885129	1373	0.0728
P_z	[1159, 1159]	1343281	2318	0.1726
D	[1159, 1373]	1591307	10000	0.6284

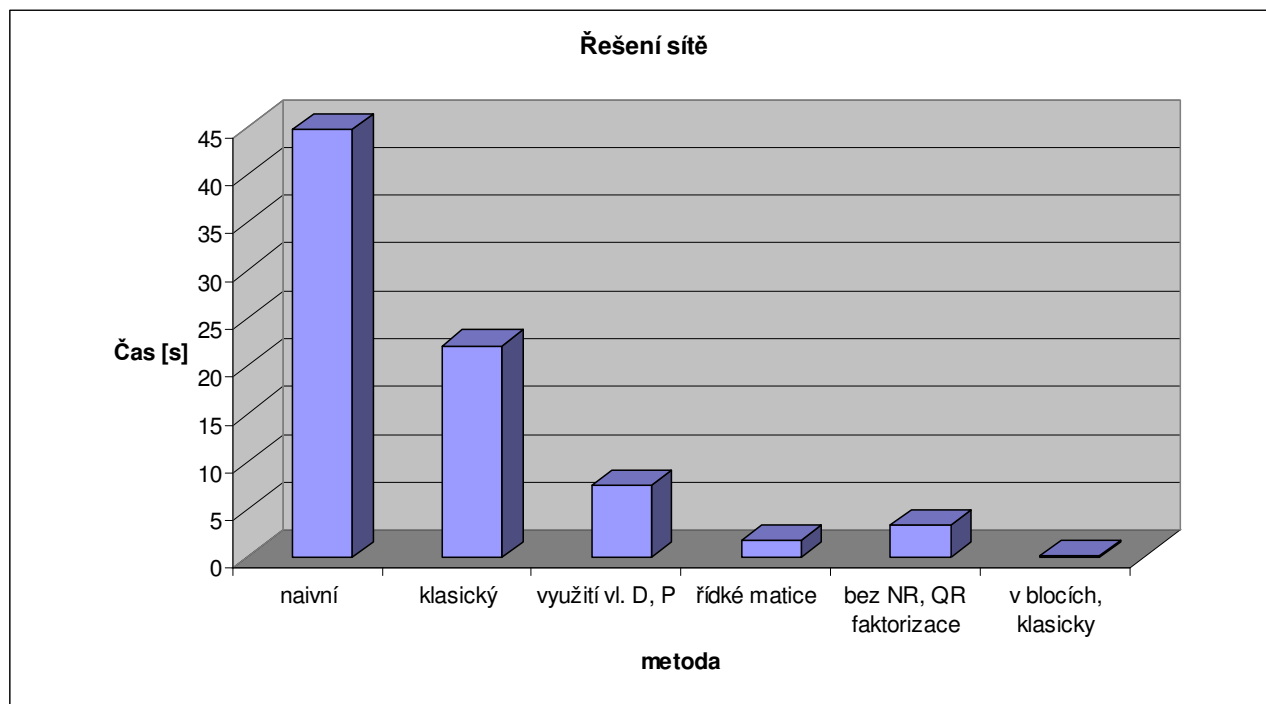
Podle výsledků v tabulce je zřejmé, že při využití řídkých matic dojde jistě ke značné úspoře paměti a vzhledem k možnosti použít speciálních algoritmů pro výpočty lze očekávat i nárůst rychlosti výpočtu.

8.2.5 Výsledek hodnocení rychlosti výpočtu

Na obrázku je uveden graf ukazující dobu výpočtu vázané sítě „Nečtiny“ pro různé způsoby výpočtu:

- „naivní“ způsob jsem označil metodu, kdy dojde k prostému přepisu algoritmu výpočtu tak, jak je uveden v odst. 6.4.4.
- *klasický* je výpočet inverzí; od předchozího bodu se liší v tom, že je optimalizovaný tak, aby se neopakovalo násobení žádných matic dvakrát. Je-li kterákoliv matice ve výpočtu použita vícekrát, uchovávám její hodnotu. Tím stoupla rychlost výpočtu zhruba dvakrát, ovšem za cenu nárůstu paměťové náročnosti.
- *využití vl. D, P* je využití řídkých matic pro matice **P_m** a **D**, tedy pro ty matice, kde to má největší význam

- *řídke matice* využití všech vlastností popsaných v odst. 8.2.4 (řešení inverzí při využití řídkých matic)
- *bez NR, QR faktorizace* je způsob výpočtu popsaný v 8.2.3
- *v blocích* je užití vyrovnání v blocích (a současně využití řídkých matic)



Výpočet probíhal na počítači s procesorem AMD Semtron 2200+ MHz a 384 MB RAM. Ukazuje se, že i úloha vyrovnání nepřilíš velké sítě může být při špatně zvoleném postupu řešení časově velmi náročná. Jako nejvýhodnější vyšlo vyrovnání v blocích – to však není univerzální metodou použitelnou na každou síť. **Jako klíčové se ukázalo využití řídkých matic**, což jsem i očekával.

Proto jsem se pokusil využít řídké matice i pro některé mezivýsledky při výpočtu, ne jen pro vstupní data. Všechny 3 postupy výpočtu uvedené v odst. 8.2.1 až 8.2.3 jsem vyzkoušel pro variantu výpočtu s plnými maticemi, s řídkými maticemi A , P_z , P_m a D a s využitím řídkých matic i pro mezivýsledky.

	plné	řídké	řídké i mezivýpočty
inverze	21.297	10.454	1.828
operátor \	19.516	11.36	3.406
QR - bez norm. rov.	21.797	13.75	11.469

Ukázalo se, že využití řídkých matic má na efektivitu výpočtu jak z hlediska paměťového, tak z hlediska časového klíčový význam.

Závěr

Domnívám se, že se cíl této práce podařilo splnit.

V teoretické části byly podány potřebné teoretické základy, a to často včetně odvození, některá odvození jsem provedl sám. Jiná odvození jsem sice převzal, musel jsem je však značně upravit, aby zapadala do celkového konceptu této práce.

Program v Matlabu je podle mě důležitým výstupem této práce. Matlab je díky perfektní práci s maticemi vhodným prostředím pro experimenty ve vyrovnávacím počtu. Program převzal pro vstup formát dat, který používá program GaMa, a tím se zvyšuje jeho užitečnost. Stejný soubor tak můžeme buďto snadno a „bez přemýšlení“ vyrovnat v programu GaMa, nebo otevřít stejný soubor v mém programu a nad daty experimentovat.

V praktické části jsem aplikoval program na vyrovnání účelové sítě v Nečtinech. Nezabývám se příliš kvalitativním hodnocením výsledku vyrovnání, ale spíše popisem jednotlivých způsobů řešení a jejich efektivitou. Z hlediska hodnocení efektivitu výpočtu lze výsledky mé práce shrnout do těchto bodů

- jako klíčové se jeví užití řídkých matic při vyrovnávání sítí. Při jejich použití klesá doba výpočtu a paměťová náročnost o řády. S narůstajícím počtem neznámých a měření lze očekávat ještě markantnější rozdíly mezi užitím řídkých matic oproti plným maticím
- metodou která podala překvapivé výsledky (lepší než prosté užití řídkých matic) je vyrovnání v blocích. Nejedná se však o univerzální metodu použitelnou na jakákoliv data
- metodu postupného vyrovnání lze výhodně použít zejm. pro odstraňování odlehlých pozorování. Výpočetní náročnost této metody je naprosto zanedbatelná při zachování potřebné přesnosti (přestože se jedná o přibližnou metodu).

Ukázalo se tak, že pro efektivitu výpočtu vyrovnání je klíčové přemýšlet nad vlastnostmi jednotlivých matic a snažit se je maximálně využít při výpočtu. Univerzální algoritmy jsou neefektivní již pro vyrovnání mého příkladu a pro rozsáhlejší reálné problémy pak již bude jejich použití často nemožné.

Příloha A – Příklad vyrovnání pro testovací data

Vstupní soubor

```
<?xml version="1.0" ?>
<gama-xml>
<network axes-xy="sw">

<points-observations>
<point id="0" fix="xy" x="0" y="0"/>
<point id="1" fix="xy" x="1" y="0"/>
<point id="2" adj="xy" x="0.98" y="1.04"/>
<point id="3" fix="xy" x="0" y="1"/>

<obs from="3">
<distance to="2" val="1" stdev="6" />
</obs>

<obs from="1">
<distance to="2" val="1" stdev="6" />
</obs>

<obs from="0">
<distance to="2" val="1.45" stdev="6" />
<direction to="1" val="0" stdev="20"/>
<direction to="2" val="50.0010" stdev="20"/>
<direction to="3" val="100.0004" stdev="20"/>
</obs>

<obs from="1">
<distance to="2" val="1" stdev="6" />
<distance to="2" val="1" stdev="6" />
<distance to="2" val="1" stdev="6" />
</obs>

</points-observations>
</network>
</gama-xml>
```

Protokol z programu GaMa

Vyrovnaní místní geodetické site verze: 1.5.09-svd / win32-msvc

<http://gama.fsv.cvut.cz/gama/>

Základní parametry vyrovnání

Souradnice	xyz	xy	z
Vyrovnané :	0	1	0
Operne * :	0	0	0
Pevne :	0	3	0

Celkem :	0	4	0

Pocet delek : 6
Celkem pozorovani : 9

Pocet rovnic oprav : 9 Pocet neznamych: 3
Pocet nadbyt. pozorovani: 6 Defekt site : 0

m0 apriorni : 10.00
m0' aposteriorni: 20.61 [pvv] : 2.54852e+003

Pri statistické analýze se pracuje

- s aposteriorní jednotkovou střední chybou 20.61
- s konfidencí pravděpodobnosti 95 %

Pomer m0' aposteriorni / m0 apriorni: 2.061
 95 % interval (0.454, 1.552) neobsahuje hodnotu m0'/m0
 m0'/m0 (delky): 2.257 m0'/m0 (smery): 0.143

Maximalni pokles m0''/m0 pri vyloucení jednoho pozorovani: 0.063

Maximalni studentizovana oprava 2.45 presahuje kritickou hodnotu 1.85
 na hladine vyznamnosti 5 % pro pozorovani #3
 <distance from="0" to="2" val="1.450" stdev="6.0" />

Pevne body

bod	x	y
1	1.000	0.000
3	0.000	1.000
0	0.000	0.000

Vyrovnane souradnice

i	bod	priblizna hodnota	korekce [m]	vyrovnana hodnota	str.ch.	konf.i.
					[mm]	[mm]
	2					
1	x	0.98000	0.02768	1.00768	4.5	11.0
2	y	1.04000	-0.03247	1.00753	4.8	11.7

Test chyby z linearizace

Diference vypoctu vyrovnanych mereni z oprav a z vyrovnanych souradnic

i	stanovisko	cil	merena hodnota	v [mm cc]	diference [cc]	[mm]
1	3	2 delka	1.00000	7.149	-0.560	
2	1	2 delka	1.00000	7.192	-0.363	
3	0	2 delka	1.45000	-25.665	-0.631	
5		2 smer	50.001000	-0.377	56.103	0.126
7	1	2 delka	1.00000	7.192	-0.363	
8		2 delka	1.00000	7.192	-0.363	
9		2 delka	1.00000	7.192	-0.363	

***** 2. opakovane vyrovnani *****

Priblizne souradnice urcovanych bodu nahrazeny vyrovnanymi

Zakladni parametry vyrovnani

Souradnice	xyz	xy	z
Vyrovnane :	0	1	0
Operne * :	0	0	0
Pevne :	0	3	0

Celkem :	0	4	0

Pocet delek : 6
 Celkem pozorovani : 9

Pocet rovnic oprav : 9 Pocet neznamych: 3
 Pocet nadbyt. pozorovani: 6 Defekt site : 0

m0 apriorni : 10.00
 m0' aposteriorni: 20.61 [pvv] : 2.54961e+003

Pri statisticke analyze se pracuje

- s aposteriorni jednotkovou stredni chybou 20.61
- s konfidencni pravdepodobnosti 95 %

Pomer m0' aposteriorni / m0 apriorni: 2.061
 95 % interval (0.454, 1.552) neobsahuje hodnotu m0'/m0
 m0'/m0 (delky): 2.257 m0'/m0 (smery): 0.143

Maximalni pokles m0''/m0 pri vyloucení jednoho pozorovani: 0.063

Maximalni studentizovana oprava 2.45 presahuje kritickou hodnotu 1.85
 na hladine vyznamnosti 5 % pro pozorovani #3
 <distance from="0" to="2" val="1.450" stdev="6.0" />

Pevne body

bod	x	y
1	1.000	0.000
3	0.000	1.000
0	0.000	0.000

Vyrovnané souradnice

i	bod	priblizna hodnota	korekce [m]	vyrovnaná hodnota	str.ch. [mm]	konf.i.
	2					
1	x	0.98000	0.02716	1.00716	4.7	11.4
2	y	1.04000	-0.03282	1.00718	4.6	11.4

Stredni chyby a parametry elips chyb

bod	mp [mm]	mxy [mm]	stred. el. chyb a [mm]	stred. el. chyb b [mm]	alfa [g]	konfid. el. chyb a' [mm]	konfid. el. chyb b' [mm]	g
2	6.6	4.7	6.6	0.1	50.0	21.1	0.4	0.3

Vyrovnaná pozorovani

i	stanovisko	cil	merena hodnota	vyrovnaná [m g]	str.ch. [mm cc]	konf.i.
1	3	2 delka	1.00000	1.00718	4.7	11.5
2	1	2 delka	1.00000	1.00721	4.7	11.5
3	0	2 delka	1.45000	1.42435	6.6	16.1
4		1 smer	0.000000	0.000219	29.2	71.3
5		2 smer	50.001000	50.000962	41.2	100.9
6		3 smer	100.000400	100.000219	29.2	71.3
7	1	2 delka	1.00000	1.00721	4.7	11.5
8		2 delka	1.00000	1.00721	4.7	11.5
9		2 delka	1.00000	1.00721	4.7	11.5

Opravy a analyza pozorovani

i	stanovisko	cil	f[%]	v [mm cc]	v'	e-mer. [mm cc]	e-vyr. [mm cc]
1	3	2 delka	62.1	7.182	0.6	8.4	1.2
2	1	2 delka	62.1	7.205	0.6	8.4	1.2
3	0	2 delka	46.8	-25.649	2.4 mk	-35.8	-10.1
4		1 smer	29.3	2.189	0.1	4.4	2.2
5		2 smer	0.0 n	-0.378			
6		3 smer	29.3	-1.811	0.1	-3.6	-1.8
7	1	2 delka	62.1	7.205	0.6	8.4	1.2
8		2 delka	62.1	7.205	0.6	8.4	1.2
9		2 delka	62.1	7.205	0.6	8.4	1.2

Odlehla pozorovani

i	stanovisko	cil	f[%]	v [mm cc]	v'	e-mer. [mm cc]	e-vyr. [mm cc]

3 0 2 delka 46.8 -25.649 2.4 mk -35.8 -10.1
Cislo podmienenosti : 3.2e+002

Protokol z Matlabu

Vyrovnani site

Nastaveny zpusob vypoctu
- Vypocet vctne odhalenych hrubych chyb: NE

Prehled vyrovnani
- Celkovy pocet pozorovani: 9
- Počet podmínek: 0
- Počet naznamanych: 2
- Počet prametru: 0
- Počet zprostředkujících: 8
- Počet nadbytečných: 6

Suma rezidui v'Pv: 0.000922

Body site cb
[3] 2 x0 = 0.98000 dx = 0.02838 x = 1.00838 mx = 0.00398
 y0 = 1.04000 dy = -0.03173 y = 1.00827 my = 0.00423

Stredni chyby a elipsy chyb v [mm]

cb	mp	mxy	a	b	alfa
2	5.8	4.1	5.8	0.1	51.9

Mereni

c.mer	z bodu	na bod	merena hodn.	v	std. v	str. chyba
[1] delka	3	2	1.00000	+0.00788	(+0.616)	0.00470
[2] delka	1	2	1.00000	+0.00792	(+0.622)	0.00470
[3] delka	0	2	1.45000	-0.02464	(-2.431)	0.00657
[4] smer	0	1	0.00000	+0.00016	(-0.146)	0.00226
[5] smer	0	2	50.00100	+0.00004	(-0.206)	0.00320
[6] smer	0	3	100.00040	-0.00020	(-0.320)	0.00226
[7] delka	1	2	1.00000	+0.00792	(+0.622)	0.00470
[8] delka	1	2	1.00000	+0.00792	(+0.622)	0.00470
[9] delka	1	2	1.00000	+0.00792	(+0.622)	0.00470

Seznam odlehlých pozorování

c.mer	z bodu	na bod	merena hodn.	v	std.	oprava
[3] delka	0	2	1.45000	-0.02464	2.43	

Statisticka analyza

Při analýze se pracuje s hladinou významnosti 0.9500

Aposteriorní jednotková střední chyba : 0.012393

Test poměru apriorní a aposteriorní střední jednotkové chyby

- Apriorní jednotková střední chyba : 0.006000
- Poměr aposteriorních chyb : 2.065527
- Interval pro poměr aposteriorních chyb (0.454119, 1.551847) (s pravděpodobností 0.95)
- Test poměru jednotkových chyb NEVYSEL

Koeficeint spicatosti: 2.02

- Interval pro koeficient spicatosti (-1.46; 1.46)
- Standardizované opravy NEODPOVIDAJI gaussovu rozdělení (podle koef. spicatosti)

Kolmogorovuv-Smirnovuv test

- Test normality souboru standardizovaných oprav (Kolmogorov-Smirnov) VYSEL

Doba výpočtu:

- výpočet matice vah zprostředkujících [8 x 8]: 0.0470
- výpočet neznámých [2 x 2]: 0.1720
- výpočet oprav v [9 x 9]: 0.0000

Příloha B – Výsledek vyrovnání vázané sítě (výtah)

Vyrovnání sítě

Nastavený způsob výpočtu

- Výpočet včetně odhalených hrubých chyb: ANO
- Sjednocování identických měření do 1 zprostřed.: NIKDY

Přehled vyrovnání

- Celkový počet pozorování: 1373
- Počet podmínek: 0
- Počet neznámých: 134
- Počet parametrů: 0
- Počet zprostředkujících: 1159
- Počet nabytečných: 1025

Suma reziduí v'Pv: 0.026873

Body sítě

11	912200121	x0 = 1044482.73076 y0 = 833392.17813	dx = -0.02398 dy = -0.00962	x = 1044482.70678 y = 833392.16851	mx = 0.00104 my = 0.00347
12	1000010601	x0 = 1044583.90957 y0 = 834730.76338	dx = -0.02166 dy = -0.03047	x = 1044583.88791 y = 834730.73291	mx = 0.00156 my = 0.00223
13	1000010602	x0 = 1044405.38808 y0 = 834686.16759	dx = -0.03094 dy = -0.00846	x = 1044405.35714 y = 834686.15913	mx = 0.00176 my = 0.00270
14	1000010603	x0 = 1044214.27973 y0 = 834590.02614	dx = -0.00325 dy = 0.01657	x = 1044214.27648 y = 834590.04271	mx = 0.00149 my = 0.00199
15	1000010604	x0 = 1044139.10954 y0 = 834491.67931	dx = 0.00027 dy = 0.01673	x = 1044139.10981 y = 834491.69604	mx = 0.00161 my = 0.00195
16	1000010606	x0 = 1044077.60630 y0 = 834386.71572	dx = 0.00320 dy = -0.01064	x = 1044077.60950 y = 834386.70508	mx = 0.00145 my = 0.00170
17	1000010609	x0 = 1044131.74752 y0 = 834345.44391	dx = 0.00329 dy = -0.01072	x = 1044131.75081 y = 834345.43319	mx = 0.00161 my = 0.00209
18	1000010610	x0 = 1044098.09881 y0 = 834303.46923	dx = 0.00655 dy = -0.00977	x = 1044098.10536 y = 834303.45946	mx = 0.00185 my = 0.00207
19	1000010611	x0 = 1044177.80119 y0 = 834246.88871	dx = -0.00971 dy = -0.00185	x = 1044177.79148 y = 834246.88686	mx = 0.00208 my = 0.00229
20	1000010613	x0 = 1044056.40913 y0 = 834168.43170	dx = -0.01097 dy = -0.00143	x = 1044056.39816 y = 834168.43027	mx = 0.00220 my = 0.00219
21	1000010614	x0 = 1044867.74412 y0 = 834490.72777	dx = 0.00017 dy = 0.00097	x = 1044867.74429 y = 834490.72874	mx = 0.00366 my = 0.00292
22	1000010617	x0 = 1044044.00089 y0 = 834242.08000	dx = -0.01493 dy = -0.00218	x = 1044043.98596 y = 834242.07782	mx = 0.00221 my = 0.00240
23	1000010619	x0 = 1043973.64885 y0 = 833781.51949	dx = -0.01629 dy = -0.00408	x = 1043973.63256 y = 833781.51541	mx = 0.00216 my = 0.00180
24	1000010621	x0 = 1043982.13604 y0 = 834263.17237	dx = -0.01770 dy = -0.00452	x = 1043982.11834 y = 834263.16785	mx = 0.00222 my = 0.00239
25	1000010622	x0 = 1043946.30575 y0 = 834294.89179	dx = -0.02077 dy = -0.00576	x = 1043946.28498 y = 834294.88603	mx = 0.00249 my = 0.00261
26	1000010623	x0 = 1043915.54255 y0 = 834317.37120	dx = -0.02344 dy = -0.00731	x = 1043915.51911 y = 834317.36389	mx = 0.00261 my = 0.00258
27	1000010624	x0 = 1043735.81114 y0 = 834352.12634	dx = -0.01998 dy = -0.02076	x = 1043735.79116 y = 834352.10558	mx = 0.00204 my = 0.00181
28	1000010625	x0 = 1044772.02431 y0 = 834509.47434	dx = -0.00607 dy = 0.02222	x = 1044772.01824 y = 834509.49656	mx = 0.00434 my = 0.00436
29	1000010626	x0 = 1044654.65272 y0 = 834524.00891	dx = -0.01750 dy = 0.01472	x = 1044654.63522 y = 834524.02363	mx = 0.00477 my = 0.00621
30	1000010627	x0 = 1044571.02669 y0 = 834524.95196	dx = -0.01592 dy = 0.00984	x = 1044571.01077 y = 834524.96180	mx = 0.00501 my = 0.00675
31	1000010628	x0 = 1044465.43966 y0 = 834477.98643	dx = -0.01342 dy = 0.00661	x = 1044465.42624 y = 834477.99304	mx = 0.00525 my = 0.00645
32	1000010629	x0 = 1044402.58318 y0 = 834441.39373	dx = -0.01203 dy = 0.00628	x = 1044402.57115 y = 834441.40001	mx = 0.00529 my = 0.00594
33	1000010630	x0 = 1044330.99261 y0 = 834350.75861	dx = -0.00753 dy = 0.00099	x = 1044330.98508 y = 834350.75960	mx = 0.00310 my = 0.00396
34	1000010631	x0 = 1044250.80823 y0 = 834277.64111	dx = -0.00196 dy = 0.00122	x = 1044250.80627 y = 834277.64233	mx = 0.00292 my = 0.00324
35	1000010633	x0 = 1043990.88110 y0 = 833947.18073	dx = 0.00519 dy = -0.00482	x = 1043990.88629 y = 833947.17591	mx = 0.00235 my = 0.00237
36	1000010634	x0 = 1043937.15264 y0 = 833857.28190	dx = -0.00616 dy = -0.00635	x = 1043937.14648 y = 833857.27555	mx = 0.00229 my = 0.00227
37	1000010635	x0 = 1044169.48595 y0 = 834549.52181	dx = -0.00381 dy = 0.01874	x = 1044169.48214 y = 834549.54055	mx = 0.00173 my = 0.00211
38	1000010636	x0 = 1044030.05101 y0 = 834485.33159	dx = -0.00277 dy = 0.02238	x = 1044030.04824 y = 834485.35397	mx = 0.00181 my = 0.00207
39	1000010637	x0 = 1043829.25898	dx = 0.00088	x = 1043829.25986	mx = 0.00190

		y0 = 834411.43457	dy = 0.01443	y = 834411.44900	my = 0.00198
40	1000010638	x0 = 1043738.05639	dx = 0.00491	x = 1043738.06130	mx = 0.00188
		y0 = 834352.38314	dy = 0.00471	y = 834352.38785	my = 0.00192
41	1000010639	x0 = 1043915.84755	dx = -0.01871	x = 1043915.82884	mx = 0.00230
		y0 = 834317.54374	dy = 0.01202	y = 834317.55576	my = 0.00250
42	1000010641	x0 = 1043586.78863	dx = -0.00901	x = 1043586.77962	mx = 0.00225
		y0 = 833714.87200	dy = -0.00047	y = 833714.87153	my = 0.00216
43	1000010653	x0 = 1043698.44788	dx = 0.00959	x = 1043698.45747	mx = 0.00532
		y0 = 834107.26891	dy = -0.01058	y = 834107.25833	my = 0.00298
44	1000010654	x0 = 1043762.33655	dx = 0.00742	x = 1043762.34397	mx = 0.00618
		y0 = 834089.36652	dy = -0.01590	y = 834089.35062	my = 0.00457
45	1000010655	x0 = 1043789.24955	dx = 0.00727	x = 1043789.25682	mx = 0.00678
		y0 = 834084.96977	dy = -0.01821	y = 834084.95156	my = 0.00543
46	1000010656	x0 = 1043605.19402	dx = -0.01450	x = 1043605.17952	mx = 0.00282
		y0 = 833753.30840	dy = -0.00843	y = 833753.29997	my = 0.00300
47	1000010657	x0 = 1043597.73211	dx = -0.00000	x = 1043597.73211	mx = 0.00553
		y0 = 833909.86437	dy = -0.00280	y = 833909.86157	my = 0.00416
48	1000010658	x0 = 1043658.89214	dx = 0.01627	x = 1043658.90841	mx = 0.00621
		y0 = 833949.92573	dy = -0.02590	y = 833949.89983	my = 0.00398
49	1000010659	x0 = 1043684.06317	dx = 0.01255	x = 1043684.07572	mx = 0.00624
		y0 = 834022.13740	dy = -0.01925	y = 834022.11815	my = 0.00385
50	1000010700	x0 = 1044190.63946	dx = -0.01073	x = 1044190.62873	mx = 0.00231
		y0 = 834283.34508	dy = -0.00336	y = 834283.34172	my = 0.00298
51	1000010701	x0 = 1044218.34786	dx = -0.01268	x = 1044218.33518	mx = 0.00263
		y0 = 834329.94310	dy = -0.00395	y = 834329.93915	my = 0.00310
52	1000010702	x0 = 1044218.44154	dx = -0.01500	x = 1044218.42654	mx = 0.00284
		y0 = 834391.38641	dy = -0.00569	y = 834391.38072	my = 0.00343
53	1000010703	x0 = 1044241.58840	dx = -0.01885	x = 1044241.56955	mx = 0.00294
		y0 = 834449.31032	dy = -0.00444	y = 834449.30588	my = 0.00354
54	1000010704	x0 = 1044207.52284	dx = -0.01591	x = 1044207.50693	mx = 0.00274
		y0 = 834509.15556	dy = -0.00338	y = 834509.15218	my = 0.00332
55	1000012625	x0 = 1043629.09292	dx = 0.01256	x = 1043629.10548	mx = 0.00147
		y0 = 834286.59193	dy = -0.00557	y = 834286.58636	my = 0.00121
56	1000014002	x0 = 1044092.66389	dx = 0.00413	x = 1044092.66802	mx = 0.00189
		y0 = 834425.32927	dy = 0.01535	y = 834425.34462	my = 0.00246
57	1000014003	x0 = 1044133.17712	dx = -0.00244	x = 1044133.17468	mx = 0.00246
		y0 = 834274.11852	dy = -0.00723	y = 834274.11129	my = 0.00258
58	1000014009	x0 = 1044227.37674	dx = -0.00233	x = 1044227.37441	mx = 0.00180
		y0 = 834553.11720	dy = 0.01494	y = 834553.13214	my = 0.00283
59	1000014101	x0 = 1044792.31463	dx = -0.02944	x = 1044792.28519	mx = 0.00442
		y0 = 834670.52278	dy = -0.05740	y = 834670.46538	my = 0.00829
60	1000014110	x0 = 1044108.64208	dx = 0.00436	x = 1044108.64644	mx = 0.00260
		y0 = 834449.36486	dy = 0.01178	y = 834449.37664	my = 0.00310
61	1000014141	x0 = 1044006.24158	dx = -0.01034	x = 1044006.23124	mx = 0.00374
		y0 = 834088.31281	dy = -0.00418	y = 834088.30863	my = 0.00371
62	1000014142	x0 = 1043949.76223	dx = -0.00872	x = 1043949.75351	mx = 0.00497
		y0 = 834021.85723	dy = -0.00802	y = 834021.84921	my = 0.00443
63	1000014143	x0 = 1043875.57322	dx = -0.00935	x = 1043875.56387	mx = 0.00529
		y0 = 834024.34334	dy = -0.01187	y = 834024.33147	my = 0.00508
64	1000014144	x0 = 1043849.77572	dx = -0.00635	x = 1043849.76937	mx = 0.00468
		y0 = 833941.10914	dy = -0.01497	y = 833941.09417	my = 0.00518
65	1000014145	x0 = 1043895.47757	dx = -0.00370	x = 1043895.47387	mx = 0.00386
		y0 = 833885.93114	dy = -0.01431	y = 833885.91683	my = 0.00387
66	1000014210	x0 = 1044092.66092	dx = 0.00738	x = 1044092.66830	mx = 0.00199
		y0 = 834425.33502	dy = 0.01137	y = 834425.34639	my = 0.00239
67	1000014241	x0 = 1044000.92860	dx = -0.00657	x = 1044000.92203	mx = 0.00249
		y0 = 834081.86992	dy = -0.00461	y = 834081.86531	my = 0.00233
68	1000014242	x0 = 1043941.29117	dx = -0.00229	x = 1043941.28888	mx = 0.00245
		y0 = 834028.81250	dy = -0.00890	y = 834028.80360	my = 0.00253
69	1000014243	x0 = 1043790.98831	dx = -0.02674	x = 1043790.96157	mx = 0.00246
		y0 = 834346.00226	dy = -0.01765	y = 834345.98461	my = 0.00205
70	1000014244	x0 = 1043973.23820	dx = -0.00422	x = 1043973.23398	mx = 0.00140
		y0 = 834628.30589	dy = -0.00472	y = 834628.30117	my = 0.00150
71	1000014245	x0 = 1044849.43976	dx = -0.00646	x = 1044849.43330	mx = 0.00163
		y0 = 834652.46028	dy = 0.00067	y = 834652.46095	my = 0.00131
72	1000014306	x0 = 1043976.24424	dx = -0.01345	x = 1043976.23079	mx = 0.00499
		y0 = 834050.53675	dy = 0.00025	y = 834050.53700	my = 0.00457
73	1000014310	x0 = 1044092.65746	dx = 0.00614	x = 1044092.66360	mx = 0.00166
		y0 = 834425.33637	dy = 0.01357	y = 834425.34994	my = 0.00205
74	1000014314	x0 = 1043597.37829	dx = -0.02315	x = 1043597.35514	mx = 0.00475
		y0 = 833862.83782	dy = -0.00342	y = 833862.83440	my = 0.00379
75	1000014322	x0 = 1044795.59860	dx = -0.00977	x = 1044795.58883	mx = 0.00140
		y0 = 834668.60514	dy = -0.01725	y = 834668.58789	my = 0.00199
76	1000015001	x0 = 1043956.11501	dx = 0.00169	x = 1043956.11670	mx = 0.00133
		y0 = 834600.89100	dy = 0.00217	y = 834600.89317	my = 0.00089
77	1000015002	x0 = 1044008.68737	dx = -0.01913	x = 1044008.66824	mx = 0.00195
		y0 = 833703.78043	dy = -0.00187	y = 833703.77856	my = 0.00091

Stredni chyby a elipsy chyb v [mm]

cb	mp	mxy	a	b	alfa
912200121	3.6	2.6	3.5	1.0	100.1
1000010601	2.7	1.9	2.2	1.5	107.0
1000010602	3.2	2.3	2.8	1.6	118.2
1000010603	2.5	1.8	2.2	1.2	131.8
1000010604	2.5	1.8	2.1	1.3	135.8
1000010606	2.2	1.6	2.0	1.0	141.2
1000010609	2.6	1.9	2.3	1.4	131.2
1000010610	2.8	2.0	2.2	1.7	135.2
1000010611	3.1	2.2	2.4	2.0	130.5
1000010613	3.1	2.2	2.3	2.1	151.6
1000010614	4.7	3.3	3.9	2.5	168.0
1000010617	3.3	2.3	2.4	2.2	121.8
1000010619	2.8	2.0	2.3	1.6	167.1
1000010621	3.3	2.3	2.4	2.2	109.1
1000010622	3.6	2.6	2.7	2.4	138.8
1000010623	3.7	2.6	2.7	2.4	152.9
1000010624	2.7	1.9	2.2	1.7	34.2
1000010625	6.2	4.3	4.8	3.9	149.3
1000010626	7.8	5.5	6.3	4.7	115.2
1000010627	8.4	5.9	6.9	4.8	117.8
1000010628	8.3	5.9	6.9	4.7	131.4
1000010629	8.0	5.6	6.9	3.9	142.6
1000010630	5.0	3.6	4.1	2.9	122.2
1000010631	4.4	3.1	3.4	2.7	133.8
1000010633	3.3	2.4	2.6	2.1	148.5
1000010634	3.2	2.3	2.6	1.9	150.9
1000010635	2.7	1.9	2.1	1.7	117.7
1000010636	2.8	1.9	2.2	1.7	131.6
1000010637	2.7	1.9	2.0	1.8	138.5
1000010638	2.7	1.9	2.0	1.8	57.1
1000010639	3.4	2.4	2.5	2.3	111.3
1000010641	3.1	2.2	2.8	1.3	48.2
1000010653	6.1	4.3	5.6	2.3	23.7
1000010654	7.7	5.4	7.1	3.0	35.9
1000010655	8.7	6.1	7.8	3.7	38.7
1000010656	4.1	2.9	3.8	1.7	53.0
1000010657	6.9	4.9	5.9	3.7	28.4
1000010658	7.4	5.2	6.4	3.7	18.6
1000010659	7.3	5.2	6.4	3.5	19.4
1000010700	3.8	2.7	3.0	2.3	96.1
1000010701	4.1	2.9	3.1	2.6	103.3
1000010702	4.5	3.1	3.4	2.8	103.4
1000010703	4.6	3.3	3.6	2.9	110.7
1000010704	4.3	3.0	3.3	2.7	111.3
1000012625	1.9	1.3	1.5	1.2	17.8
1000014002	3.1	2.2	2.5	1.9	107.6
1000014003	3.6	2.5	2.7	2.3	138.9
1000014009	3.3	2.4	3.0	1.5	125.1
1000014101	9.4	6.6	8.5	4.0	83.6
1000014110	4.0	2.9	3.2	2.5	78.0
1000014141	5.3	3.7	3.9	3.6	45.6
1000014142	6.7	4.7	5.0	4.4	195.7
1000014143	7.3	5.2	5.4	5.0	32.0
1000014144	7.0	4.9	5.2	4.6	120.1
1000014145	5.5	3.9	4.1	3.6	149.1
1000014210	3.1	2.2	2.5	1.8	131.1
1000014241	3.4	2.4	2.6	2.3	168.4
1000014242	3.5	2.5	2.6	2.3	141.1
1000014243	3.2	2.3	2.5	2.0	9.5
1000014244	2.1	1.5	1.8	1.1	54.9
1000014245	2.1	1.5	1.7	1.2	173.6
1000014306	6.8	4.8	5.3	4.2	162.6
1000014310	2.6	1.9	2.2	1.5	130.6
1000014314	6.1	4.3	5.1	3.2	32.8
1000014322	2.4	1.7	2.0	1.3	81.1
1000015001	1.6	1.1	1.3	0.9	1.3
1000015002	2.2	1.5	2.0	0.9	190.8

Měření

c.mer	z bodu	na bod	merena hodn.	v	std. v	str. chyba
[1] smer	912202020	912202211	74.88210	-0.00286	(-1.940)	0.00085
[2] smer	912202020	1000010601	0.00000	-0.00036	(-0.322)	0.00085
[3] smer	912202020	1000010606	1.34490	-0.00016	(-0.189)	0.00091
[4] smer	912202020	1000010603	12.23540	-0.00045	(-0.377)	0.00085
[5] smer	912202020	912202301	34.43905	+0.00382	(+2.396)	0.00085
[6] smer	912202020	912202211	74.88185	-0.00298	(-2.018)	0.00085
[7] smer	912202020	1000010601	0.00000	-0.00073	(-0.562)	0.00085
[8] smer	912202020	1000010606	1.34430	+0.00007	(-0.040)	0.00091
[9] smer	912202020	1000010603	12.23480	-0.00022	(-0.228)	0.00085

[10]	smer	912202020	912202301	34.43865	+0.00385	(+2.415)	0.00085
[11]	smer	912202020	912202211	74.88050	-0.00243	(-1.661)	0.00085
[12]	smer	912202020	1000010601	0.00000	-0.00153	(-1.082)	0.00085
[13]	smer	912202020	1000010606	1.34235	+0.00122	(+0.706)	0.00091
[14]	smer	912202020	1000010603	12.23465	-0.00087	(-0.650)	0.00085
[15]	smer	912202020	912202301	34.43810	+0.00360	(+2.253)	0.00085

(vynecháno - kompletní protokol na příloženém CD)

[1361]	delka	1000010659	1000010653	86.33943	+0.00688	(+0.886)	0.00328
[1362]	delka	1000010659	1000010658	76.47291	+0.00506	(+0.765)	0.00279
[1363]	smer	1000010659	1000010658	0.00000	+0.00111	(+0.624)	0.00129
[1364]	smer	1000010659	1000010653	210.69670	-0.00097	(-0.693)	0.00179
[1365]	smer	1000010659	1000010658	0.00125	-0.00014	(-0.177)	0.00129
[1366]	delka	1000010653	1000012625	192.27317	-0.00190	(-0.470)	0.00203
[1367]	delka	1000010653	1000010659	86.33709	+0.00922	(+1.218)	0.00328
[1368]	delka	1000010653	1000010654	66.34890	-0.00005	(-0.095)	0.00229
[1369]	delka	1000010653	1000012625	192.27225	-0.00098	(-0.285)	0.00203
[1370]	smer	1000010653	1000012625	0.00000	-0.00228	(-1.556)	0.00116
[1371]	smer	1000010653	1000010659	165.85040	+0.00177	(+1.024)	0.00179
[1372]	smer	1000010653	1000010654	259.10305	+0.00400	(+2.457)	0.00144
[1373]	smer	1000010653	1000012625	0.00120	-0.00348	(-2.328)	0.00116

Seznam odlehlých pozorování

c.mer		z bodu	na bod	merena hodn.	v	std.	oprava
[26]	delka	912202020	1000010603	496.33175	+0.01818	3.98	
[73]	smer	1000010603	912202301	286.57590	+0.00622	3.94	
[38]	smer	1000010603	1000010602	292.29045	-0.00589	3.90	
[246]	delka	1000010613	1000010617	74.67067	+0.01551	3.39	
[395]	delka	912202020	1000015001	376.73732	-0.01359	3.24	
[1068]	smer	912202220	912200270	320.95620	+0.00506	3.17	
[1078]	smer	912202220	912202020	40.54415	-0.00477	3.16	
[1074]	smer	912202220	912202020	40.54405	-0.00462	3.06	
[394]	delka	912202020	1000015001	376.73648	-0.01276	3.04	
[995]	smer	1000010603	1000010602	292.28870	-0.00457	3.04	
[36]	smer	1000010603	912202020	113.42030	-0.00448	2.99	
[1076]	smer	912202220	912200270	320.95745	+0.00472	2.96	
[1001]	smer	1000010603	1000010602	292.28830	-0.00445	2.96	
[1072]	smer	912202220	912200270	320.95770	+0.00452	2.83	
[831]	smer	1000010704	1000010703	207.59225	-0.00429	2.80	
[1070]	smer	912202220	912202020	40.54265	-0.00418	2.78	
[1150]	delka	912202230	1000010641	490.55906	+0.01276	2.77	
[1029]	delka	1000010637	1000010636	213.94495	+0.01280	2.77	
[1031]	delka	1000010637	1000010636	213.94513	+0.01263	2.73	
[1026]	delka	1000010637	1000010636	213.94533	+0.01243	2.68	
[894]	delka	1000015002	1000015001	898.64060	+0.01189	2.68	
[35]	smer	1000010603	912202301	0.00000	+0.00424	2.66	
[28]	delka	912202020	1000010606	259.12631	+0.01195	2.65	
[550]	delka	1000010637	1000010636	213.96921	-0.01146	2.64	
[554]	delka	1000010637	1000010636	213.96882	-0.01106	2.55	
[901]	delka	1000015002	1000015001	898.64139	+0.01110	2.50	

Statistická analýza

Při analýze se pracuje s hladinou významnosti 0.9500

Aposteriorní jednotková střední chyba : 0.006160

Test poměru apriorní a aposteriorní střední jednotkové chyby

- Apriorní jednotková střední chyba : 0.006000
- Poměr aposteriorních chyb : 1.026723
- Interval pro poměr aposteriorních chyb (0.956706, 1.043269) (s pravděpodobností 0.95)
- Test poměru jednotkových chyb VYSEL

Koeficient spicátosti: 0.72

- Interval pro koeficient spicátosti (-0.30; 0.30)
- Standardizované opravy NEODPOVIDAJÍ gaussovu rozdělení (podle koef. spicátosti)

Kolmogorovuv-Smirnovuv test

- Test normality souboru standardizovaných oprav (Kolmogorov-Smirnov) NEVYSEL

Doba výpočtu:

- výpočet matice vah zprostředkujících [1159 x 1159]: 0.2500
- výpočet neznámých [134 x 134]: 0.0310
- výpočet oprav v [1373 x 1373]: 0.0160

Použité zdroje

1. Bitterer, L. Štruktúry matice podmienok F pri vyrovnani volných sietí. Geodetický a kartografický obzor, ročník 51/93, 2005, číslo 3
2. Böhm J., Radouch V., Hampacher M. Vyrovnávací počet. Praha: SNTL, 1990
3. Čepek, A. GNU GaMa 1.7. [online]. [cit. 23.4.2005].
URL: <www.gnu.org/software/gama/manual/pdf/gama.pdf>
4. Hampacher M., Radouch V. Teorie chyb a vyrovnávací počet 10, 20. Praha.: ČVUT, 1997
5. Hampacher, M., Radouch, V. Teorie chyb a vyrovnávací počet 10, 20. Příklady a návody ke cvičením. Praha: ČVUT, 1998
6. Jandourek, J. Gedézie 50. Vyrovnání účelových geodetických sítí v E2 a v E3. Praha: ČVUT, 2000.
7. [PostVyr] Kabeláč, J., Massad S., Ron, C. Postupné vyrovnání zprostředkujících měření metodou nejmenších čtverců. Geodetický a kartografický obzor, ročník 37/79, 1991, číslo 1
8. Kabeláč, J. Výškové vyrovnání vysokohorské sítě „Rysy 1988“. Geodetický a kartografický obzor, ročník 40/82, 1994, číslo 1
9. Kabeláč, J. Geodetické metody vyrovnání: Metoda nejmenších čtverců. Plzeň: ZČU, 2003.
10. Míka, S. Numerická analýza.[online]. [cit. 24.2.2005].
URL: <<http://webmath.zcu.cz:8080/webMathTest/materialy/na/newna.ps>>
11. Reif, J. Metody matematické statistiky. Plzeň: ZČU, 2004.