

Západočeská univerzita v Plzni  
Fakulta aplikovaných věd  
Katedra matematiky

## **Diplomová práce**

# **Matematické základy v popisu tíhového pole Země**

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Jitka HÁJKOVÁ**  
Studijní program: **M3602 Geomatika**  
Studijní obor: **Geomatika - Kartografie**

Název tématu: **Matematické základy v popisu tíhového pole Země**

### Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

Seznamte se se základy matematického aparátu používaného v geodézii při popisu vnějšího tíhového pole Země. Postupujte podle tohoto schématu:

1. Prostudujte doporučenou literaturu a seznamte se se základy matematického aparátu používaného při popisu vnějšího tíhového pole Země. Zvláštní pozornost věnujte rozkladu harmonické funkce v nekonečné řady a metodě hraničních integrálů teorie potenciálu při řešení Laplaceovy diferenciální rovnice.
2. Věnujte se používaným postupům z matematického pohledu: u vybraného řešení diskutujte jeho existenci, jednoznačnost a stabilitu.
3. Diskutujte matematický aparát z pohledu dostupných vstupních dat. Popište hlavní rozpory mezi požadavky a předpoklady teoretických řešení a kvalitou a kvantitou dostupných dat.
4. S ohledem na kvalitu a kvantitu naměřených dat rozeberte používané metody, jejich hlavní problémy a možnosti jejich řešení.
5. Aplikujte získané poznatky na matematický postup výpočtu geometrie referenční hladinové plochy tíhového pole Země (geoid).
6. Při uvážení dostupnosti potřebných údajů týkajících se přesnosti vstupních dat popište postup výpočtu odhadu chyb určovaných parametřů.

Rozsah práce: cca 45 stran  
Rozsah příloh: dle potřeby  
Forma zpracování diplomové práce: tištěná

Seznam odborné literatury:

- Heiskanen WA., Moritz H. (1967). Physical geodesy. Freeman and Co., San Francisco.
- Nádeník Z. (1984). Matematické základy ke knize H. Moritz: Advanced Physical Geodesy. VÚGTK Zdíby.
- Martinec Z. (1998). Boundary-value problems for gravimetric determination of a precise geoid. Springer Heidelberg Berlin New York.
- Mikhail EM., Ackerman F. (1982). Observations and least squares. University Press of America, Lenham New York London.

Vedoucí diplomové práce:

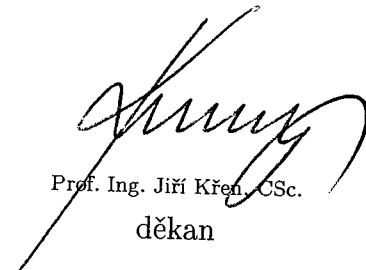
Doc. Ing. Pavel Novák, Ph.D.  
Katedra matematiky

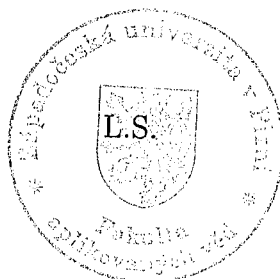
Datum zadání diplomové práce:


1. září 2005

Termín odevzdání diplomové práce:

29. května 2006

  
Prof. Ing. Jiří Křen, CSc.  
děkan



  
Prof. RNDr. Pavel Drábek, DrSc.  
vedoucí katedry

V Plzni dne 1. září 2005

## **Abstrakt**

Tato práce shrnuje základní matematické postupy používané v geodézii při popisu tíhového pole Země. Matematické modely jsou diskutovány nejprve obecně za předpokladu ideálních vstupních dat, později na pozadí dostupných tíhových dat. Práce se zaměřuje především na popis globální složky tíhového pole Země metodou spektrálního rozkladu a na řešení reziduální složky tíhového pole pomocí hraničních integrálů. Jsou zde popsány některé problémy, které se vyskytují při řešení tíhového pole Země a jeho základní hladinové plochy – geoidu. Práce popisuje také dostupná tíhová data, možnosti jejich měření (gravimetrie, gradiometrie) a klady a zápory jednotlivých typů měření.

## **Klíčová slova**

geoid, referenční elipsoid, tíhový potenciál, tíhová porucha, tíhová anomálie, Laplaceova diferenciální rovnice, harmonická funkce, sférická harmonická řada, Stokesovy koeficienty, gravimetrie, gradiometrie, Abel-Poissonův integrál, Greenův integrál, Hotinova funkce, Stokesova funkce, Moloděnského úloha

## **Abstract**

This thesis describes basic mathematical methods used in geodesy for description of the Earth's gravity field. Mathematical models are first discussed generally for ideal input data, then on the background of available gravity data. The thesis deals especially with description of the global part of the gravity field by methods of spectral decomposition and with solution of the residual part of the gravity field by boundary integral equations. Basic problems in the solution of the gravity field parameters and of the geoid are described in this thesis. Available gravity data, their observation techniques (gravimetry, gradiometry) and advantages/disadvantages of particular data types are also discussed.

## **Keywords**

geoid, reference ellipsoid, gravity potential, gravity disturbance, gravity anomaly, Laplace's differential equation, harmonic function, spherical harmonic series, Stokes's coefficients, gravimetry, gradiometry, Abel-Poisson's integral, Green's integral, Hotine's function, Stokes's function, Molodensky's formula

## **Prohlášení**

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě diplomovou práci zpracovanou na závěr studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem předloženou diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené odborné literatury a zdrojů informací.

V Plzni dne 11.5.2006

## **Poděkování**

Tímto bych chtěla poděkovat vedoucímu diplomové práce Doc. Ing. Pavlu Novákovi, Ph.D. za metodické vedení a věcné připomínky při zpracování diplomové práce. Děkuji také za poskytnutí odborné literatury a odborných textů použitých při zpracování diplomové práce.

# Obsah

SEZNAM OBRÁZKŮ .....	9
SEZNAM TABULEK.....	9
PŘEHLED ZKRATEK A POUŽITÉHO ZNAČENÍ.....	10
1 ÚVOD.....	12
2 ZEMĚ.....	13
2.1 REFERENČNÍ PLOCHY.....	14
2.2 SOUŘADNICOVÉ SYSTÉMY.....	16
2.2.1 GEOCENTRICKÝ ZEMSKÝ SOUŘADNICOVÝ SYSTÉM.....	16
2.2.2 GEOCENTRICKÝ GEODETICKÝ SOUŘADNICOVÝ SYSTÉM .....	17
2.2.3 TYPY SOUŘADNIC.....	18
2.3 GEODETICKÝ REFERENČNÍ SYSTÉM 1980 (GRS 80) .....	22
2.4 TYPY GEODETICKÝCH VÝŠEK.....	23
2.4.1 TRANSFORMACE VÝŠEK.....	24
3 ZÁKLADY TEORIE TÍHOVÉHO POLE ZEMĚ .....	25
3.1 SKUTEČNÉ TÍHOVÉ POLE ZEMĚ.....	25
3.1.1 POTENCIÁL SKUTEČNÉHO TÍHOVÉHO POLE ZEMĚ.....	27
3.1.2 REPREZENTACE GRAVITAČNÍHO POTENCIÁLU METODOU SPEKTRÁLNÍHO ROZKLADU .....	28
3.2 TÍHOVÉ POLE REFERENČNÍHO ELIPSOIDU (NORMÁLNÍ TÍHOVÉ POLE) .....	31
3.2.1 POTENCIÁL NORMÁLNÍHO TÍHOVÉHO POLE .....	32
3.2.2 REPREZENTACE NORMÁLNÍHO TÍHOVÉHO POTENCIÁLU METODOU SPEKTRÁLNÍHO ROZKLADU.....	33
3.3 PORUCHOVÉ TÍHOVÉ POLE .....	34
4 JAKÁ TÍHOVÁ DATA JE MOŽNÉ MĚŘIT.....	40
4.1 GRAVIMETRIE.....	40
4.1.1 DRUŽICOVÁ GRAVIMETRIE .....	43
4.2 GRADIOMETRIE .....	45
4.2.1 DRUŽICOVÁ GRADIOMETRIE – GOCE.....	46
4.3 DRUŽICOVÁ ALTIMETRIE.....	47
5 MATEMATICKÉ METODY ŘEŠENÍ.....	49
5.1 DIRICHLETOVA ÚLOHA .....	49
5.2 POUŽITELNÉ OKRAJOVÉ PODMÍNKY PRO PORUCHOVÝ TÍHOVÝ POTENCIÁL.....	50
5.2.1 URČENÍ OKRAJOVÉ PODMÍNKY POMOCÍ TÍHOVÉ PORUCHY .....	53
5.2.2 URČENÍ OKRAJOVÉ PODMÍNKY POMOCÍ TÍHOVÉ ANOMÁLIE.....	54
5.3 ŘEŠENÍ DIRICHLETOVY ÚLOHY.....	57



<b>5.4</b>	<b>VYUŽITÍ DIRICHLETOVY ÚLOHY PŘI POPISU TÍHOVÉHO POLE .....</b>	<b>58</b>
5.4.1	ŘEŠENÍ INVERZNÍ DIRICHLETOVY ÚLOHY .....	60
<b>5.5</b>	<b>DVOUKROKOVÉ ŘEŠENÍ PORUCHOVÉHO TÍHOVÉHO POTENCIÁLU.....</b>	<b>61</b>
5.5.1	ŘEŠENÍ POMOCÍ TÍHOVÉ PORUCHY .....	62
5.5.2	ŘEŠENÍ POMOCÍ TÍHOVÉ ANOMÁLIE .....	64
<b>5.6</b>	<b>BRUNSŮV TEORÉM.....</b>	<b>65</b>
<b>5.7</b>	<b>MOLODĚNSKÉHO ÚLOHA .....</b>	<b>66</b>
<b>5.8</b>	<b>UKÁZKA VÝPOČTU KVAZIGEIDU NA ZÁKLADĚ KOMBINACE TÍHOVÝCH MĚŘENÍ.....</b>	<b>69</b>
<b>6</b>	<b>ODHAD CHYB URČOVANÝCH PARAMETRŮ .....</b>	<b>73</b>
6.1	STOKESOVA ÚLOHA .....	74
6.2	SFÉRICKE HARMONICKÉ ŘADY.....	75
<b>7</b>	<b>ZÁVĚR .....</b>	<b>78</b>
	REFERENCE .....	81
	DODATEK.....	85
A.	MATEMATICKÉ OPERÁTORY .....	85
B.	HARMONICKÉ FUNKCE A LAPLACEOVA DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE .....	88
C.	LEGENDREOVY FUNKCE .....	90
D.	NEWTONŮV OBJEMOVÝ INTEGRÁL .....	92

## Seznam obrázků

Obrázek 2-1: Složky vektoru intenzity tíhového pole .....	13
Obrázek 2-2: Kartézské souřadnice .....	18
Obrázek 2-3: Sférické souřadnice.....	19
Obrázek 2-4: Jacobiho elipsoidální souřadnice .....	21
Obrázek 2-5: Vztah mezi ortometrickou, elipsoidální a geoidální výškou .....	24
Obrázek 3-1: Skutečné a normální tíhové zrychlení .....	36
Obrázek 3-2: Skutečné a normální tíhové pole .....	38
Obrázek 3-3: Geoidální výška .....	39
Obrázek 4-1: Letecká gravimetrie – příklad plánu letu.....	41
Obrázek 4-2: EIGEN-CHAMP03S – geoidální výšky (v metrech) .....	44
Obrázek 4-3: EIGEN-CHAMP03S - tíhové anomálie (v mGal).....	44
Obrázek 4-4: Družice (zleva) CHAMP, GRACE, GOCE.....	47
Obrázek 5-1: Umístění bodů $P, P', Q, Q'$ na konkrétní plochy .....	52
Obrázek 5-2: Rozložení dat v Moloděnského úloze.....	68
Obrázek 5-3: Kvazigeoid (v metrech) - globální složka určená sférickou harmonickou řadou do $n=120$ .....	70
Obrázek 5-4: Kvazigeoid (v metrech) - reziduální složka pro $n \geq 121$ .....	71
Obrázek 5-5: Kvazigeoid (v metrech) na území ČR .....	72

## Seznam tabulek

Tabulka 3.1: Porovnání skutečného a normálního tíhového pole .....	38
Tabulka 3.2: Poruchové a anomální veličiny .....	39
Tabulka 4.1: Výhody a nevýhody různých typů gravimetrických měření .....	43

## Přehled zkratk a použitého značení

$W$  ... potenciál tíhového pole Země (skutečný tíhový potenciál)

$W_g$  ... gravitační složka skutečného tíhového potenciálu

$W_c$  ... odstředivá složka skutečného tíhového potenciálu

$W_0 = \text{konst.}$  ... skutečný tíhový potenciál na geoidu

$U$  ... potenciál tíhového pole referenčního elipsoidu (normální tíhový potenciál)

$U_g$  ... gravitační složka normálního tíhového potenciálu

$U_c$  ... odstředivá složka normálního tíhového potenciálu

$T$  ... poruchový tíhový potenciál

$g$  ... skutečné tíhové zrychlení (intenzita tíhového pole Země)

$\gamma$  ... normální tíhové zrychlení (intenzita tíhového pole referenčního elipsoidu)

$H^O$  ... ortometrická výška

$H^N$  ... normální (Moloděnského) výška

$h$  ... elipsoidální (geodetická) výška

$\zeta$  ... výšková anomálie

$N$  ... geoidální výška (též označení příčného poloměru křivosti referenčního elipsoidu)

$\delta g$  ... tíhová porucha

$\Delta g$  ... tíhová anomálie

$\Theta$  ... tížnicová odchylka

$t$  ... lokální tížnice

$n$  ... normála k referenčnímu elipsoidu

$r$  ... průvodič bodu (určuje radiální směr)

$R$  ... poloměr náhradní koule

$GM$  ... geocentrická gravitační konstanta

$G$  ... univerzální gravitační konstanta

$J_2$  ... zonální Stokesův koeficient

$\omega$  ... úhlová rychlost rotace Země

$\rho$  ... hustota daného tělesa (především Země)  
 $\psi$  ... sférická vzdálenost dvou bodů  
 $a$  ... hlavní poloosa referenčního elipsoidu  
 $b$  ... vedlejší poloosa referenčního elipsoidu  
 $f$  ... zploštění referenčního elipsoidu  
 $e$  ... první numerická výstřednost referenčního elipsoidu  
 $\lambda$  ... sférická délka; geodetická délka; geocentrická délka  
 $\theta$  ... pólová vzdálenost  
 $\varphi$  ... geodetická šířka  
 $\phi$  ... redukovaná šířka  
 $E$  ... lineární excentricita  
 $A_{n,m}, B_{n,m}$  ... Stokesovy koeficienty  
 $J_n$  ... koeficienty ve sférické harmonické řadě popisující normální gravitační potenciál  
 $P_n$  ... Legendreův polynom prvního druhu  
 $Q_n$  ... Legendreův polynom druhého druhu  
 $P_{n,m}$  ... přidružená Legendreova funkce prvního druhu  
 $Q_{n,m}$  ... přidružená Legendreova funkce druhého druhu  
 $K$  ... integrační jádro (obecná Greenova funkce)  
 $H$  ... Hotinova sférická funkce  
 $S$  ... Stokesova sférická funkce (též označení plochy)  
 $\Omega$  ... prostorový úhel  
 $M$  ... množina, oblast (též označení meridiánového poloměru křivosti referenčního elipsoidu)  
 $\Sigma$  ... kovarianční matice  
 $\sigma^2$  ... střední kvadratická chyba (variance)

*Poznámka:* V textu jsou vektory psány malým písmem, tučně a kurzívou (vektor  $\mathbf{r}$ ), matice jsou psány velkým písmem a tučně (matice  $\mathbf{A}$ ).

# 1 Úvod

Popis tíhového pole Země a přesné určení jeho konkrétní hladinové plochy (geoidu, popř. kvazigeoidu) jsou významnými úkoly současné geodézie. Pro geodézii je tíhové pole Země důležité především v teorii výšek. Znalost geoidu umožní např. určení ortometrické (nadmořské) výšky bodů, které byly zaměřeny aparaturou GPS (Global Positioning System - Globální Polohové Systémy). Tíhové pole lze ale využít také v jiných oblastech, např. při vyhledávání a průzkumu ložisek nerostných surovin a popisu slapových pohybů zemské kůry. Cílem této práce je shrnutí vybraných matematických postupů používaných v geodézii při popisu tíhového pole Země.

V úvodní kapitole jsou definovány některé základní pojmy (souřadnicové systémy, geodetické výšky apod.). Především je zde ale popsán geodetický referenční systém GRS 80, který definuje mezinárodní referenční elipsoid a jeho normální tíhové pole. Druhá kapitola se nejdříve věnuje popisu tíhového pole Země a jeho vlastnostem, z nichž vychází řešení nízkofrekvenční složky gravitačního potenciálu metodou spektrálního rozkladu. Dále obsahuje popis tíhového pole referenčního elipsoidu. V poslední části druhé kapitoly jsou uvedeny veličiny charakterizující poruchové tíhové pole, které popisuje rozdíl skutečného a normálního tíhového pole.

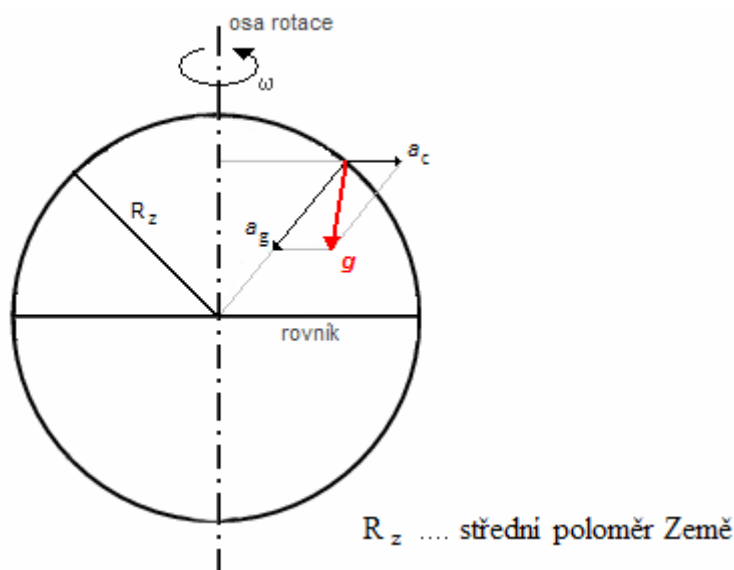
Třetí kapitola se zabývá daty, která je možné měřit. Uvádí výhody a nevýhody tíhových dat získaných pomocí jednotlivých typů gravimetrie a stručně popisuje také gradiometrii. Čtvrtá kapitola popisuje matematické modely využívané při řešení vysokofrekvenční složky tíhového pole. Modely jsou diskutovány nejprve obecně za předpokladu ideálních vstupních dat, později v kontextu dostupných tíhových dat. Nedokonalá vstupní data vedou k úpravám matematických modelů, které tak vedou pouze k přibližným řešením.

Tato práce se zaměřuje především na řešení vysokofrekvenční složky tíhového pole pomocí hraničních integrálů. Vychází se z okrajových úloh pro poruchový tíhový potenciál. Okrajové podmínky jsou dány hodnotami, které je možné odvodit z měření - tíhovou poruchou nebo tíhovou anomálií. Kromě těchto metod vedoucích k určení geoidu je zde také uvedena Moloděnského metoda, která vede k řešení kvazigeoidu. V závěru práce je diskutován vliv měřických chyb na určované hodnoty.

## 2 Země

Země je těleso udržované ve svém tvaru silou tíže. Země kolem sebe vytváří *tíhové pole*, jehož základními charakteristikami jsou *intenzita tíhového pole (tíhové zrychlení  $g$ )* a *tíhový potenciál  $W$* .

Tíhové zrychlení  $g$  získáme vektorovým součtem *gravitačního zrychlení  $a_g$*  a *odstředivého zrychlení  $a_c$*  - viz obr. 2-1. Vektor gravitačního zrychlení  $a_g$  směřuje přibližně do těžiště Země. Odchyly od směru do těžiště jsou způsobeny nerovnoměrným rozmístěním hmot zemského tělesa. Odstředivé zrychlení  $a_c$  způsobené rotací Země směřuje od osy rotace Země ve směru kolmém k této ose, jeho vektor je tedy rovnoběžný s rovinou rovníku. Průměrná velikost vektoru tíhového zrychlení na Zemi má hodnotu  $9,80665 \text{ ms}^{-2}$ . Maximálních hodnot dosahuje v oblasti pólů (vzhledem k nulovému odstředivému zrychlení a zploštění Země na pólech), minimálních hodnot na rovníku.



**Obrázek 2-1: Složky vektoru intenzity tíhového pole** (obrázek je schematický - ve skutečnosti gravitační složka směřuje pouze přibližně do těžiště Země)

Tíhový potenciál (potenciál tíhového pole) v daném bodě je úměrný práci v kinematickém smyslu potřebné k přenesení tělesa o jednotkové hmotnosti z tohoto bodu do nekonečna. Lze jej definovat jako potenciální energii tělesa o hmotnosti 1 kg, ovšem se znaménkem mínus. Jednotkou je  $\text{m}^2\text{s}^{-2}$ . Plochy s konstantním potenciálem tvoří *hladinové* (ekvipotenciální) *plochy*, které jsou koncentrické okolo Země. Hladinová plocha

s potenciálem  $W_0$ , která aproximuje střední hladinu zemských oceánů, se nazývá geoid. Určení hodnoty  $W_0$  je jednou z otázek geodézie, která v této práci není dále diskutována. Předpokládá se, že hodnota  $W_0$  je známá.

## 2.1 Referenční plochy

Základní hladinovou plochou skutečného tíhového pole Země je geoid, který je v Moloděnského teorii nahrazen kvazigeoidem. Obě tyto plochy jsou fyzikální aproximací zemského povrchu. Výšky bodů na zemském povrchu vztahující se ke geoidu (ortometrické výšky) a ke kvazigeoidu (normální výšky) jsou tudíž ovlivněny účinky tíhového pole Země.

*Geoid* (Gauss 1828; Listing 1873) je spojitá, hladká a konvexní plocha, která nejlépe odpovídá nerušené střední hladině světových moří protažené i pod kontinenty. Tento tvar by měla Země, pokud by byl její povrch pokryt pouze oceánem a zanedbaly by se vlivy okolního prostředí (atmosférický tlak, okolní teplota, ...) a nehomogenosti oceánu (různá teplota vody, slanost, proudění, ...). Geoid je ve všech bodech kolmý na směr tíže, matematické vyjádření této nepravidelné plochy je tedy velmi složité. Je však značně hladší plochou než topografie. Zatímco odchylky zemského povrchu od geoidu se pohybují v rozmezí přibližně - 11 000 m (Mariánský příkop) až + 9 000 m (Mount Everest), geoid se odchyluje od referenčního elipsoidu maximálně o hodnoty  $\pm 150$  m.

*Kvazigeoid* (Moloděnskij 1945) je referenční plocha pro normální (Moloděnského) výšky, které se mimo jiné používají v Baltském výškovém systému po vyrovnání (Bpv). Tento systém byl v roce 1957 zaveden v tehdejší Československu a v České republice se používá dodnes. Kvazigeoid není hladinovou plochou, ale jeho odchylky od geoidu dosahují hodnot maximálně 1,5 m. Přes oblasti světových oceánů jsou geoid a kvazigeoid totožné plochy, liší se pouze pod kontinenty.

Při řešení úloh spojených s určením tvaru zemského povrchu a popisem tíhového pole je někdy nutné nahradit tvar Země plochou, která by byla hladší než geoid (kvazigeoid) a která by se dala využít při matematickém zpracování řešení daného problému. Mezi nejčastěji využívané plochy patří referenční elipsoid a střední koule. Tyto

plochy nejsou fyzikální aproximací Země. Výšky, které jsou k nim vztaženy, nejsou ovlivněny tíhovým polem Země.

*Referenční elipsoid* je geocentrický rotační elipsoid, jehož parametry jsou voleny tak, aby co nejlépe approximoval geoid, tj. aby minimalizovaly integrál

$$\min_{a,f} \iint_S N^2 dS, \quad (2.1)$$

kde  $N$  je převýšení geoidu nad referenčním elipsoidem (geoidální výška),  $S$  je plocha elipsoidu a  $dS$  je element této plochy. Integrál v rovnici (2.1) určuje dva ze základních parametrů referenčního elipsoidu - hlavní poloosa  $a$  a zploštění elipsoidu  $f$ . Další základní parametry elipsoidu jsou vedlejší poloosa  $b$  a první numerická výstřednost  $e$ . Referenční elipsoid je zpravidla definován pomocí jedné z následujících kombinací základních parametrů -  $(a, e)$ ,  $(a, f)$ . Hlavní poloosa  $a$  udává rozměr elipsoidu, druhý bezrozměrný parametr v kombinacích udává jeho tvar (míru zploštění). Častěji se využívá kombinace parametrů  $(a, f)$ . Pomocí vztahů (2.2) a (2.3) lze ze dvou parametrů dopočítat zbylé dva (Moritz 1984):

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad (2.2)$$

$$f = \frac{a - b}{a}. \quad (2.3)$$

Aproximace geoidu může být globální (např. mezinárodní referenční elipsoid GRS 80 – Geodetic Reference System 1980, viz kap. 2.3, užívaný také pro popis tíhového pole Země, či referenční elipsoid World Geodetic System WGS-84 definovaný pro potřeby GPS) nebo lokální. Při řešení tíhového pole Země se používá pouze globální referenční elipsoid. Přestože je povrch referenčního elipsoidu poměrně hladká plocha, kterou lze matematicky popsat, jsou na něm výpočty stále velmi složité. Pro zjednodušení výpočtů se elipsoid někdy dále nahrazuje střední koulí. Tím sice dochází ke snížení přesnosti řešení (odchyly koule od geoidu dosahují hodnot až  $\pm 10$  km), výpočty na kouli jsou však mnohem jednodušší. Existuje několik možností, jak volit poloměr střední koule v případě, že koule nahrazuje referenční elipsoid globálně (Moritz 1984):

- objem koule je roven objemu elipsoidu, tedy platí

$$\frac{4}{3} \pi R_m^3 = \frac{4}{3} \pi a^2 b, \quad (2.4)$$



z toho

$$R'_m = \sqrt[3]{a^2 b}; \quad (2.5)$$

- poloměr koule je roven aritmetickému průměru poloos elipsoidu

$$R''_m = \frac{2a + b}{3}. \quad (2.6)$$

Pokud by měla koule nahrazovat pouze část elipsoidu, volí se zpravidla poloměr

$$R_m = \sqrt{MN} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \sin^2 \varphi}, \quad (2.7)$$

kde  $M$  je meridiánový poloměr křivosti referenčního elipsoidu,  $N$  je jeho příčný poloměr křivosti,  $a$  je hlavní poloosa referenčního elipsoidu,  $e$  první numerická výstřednost a  $\varphi$  je geodetická šířka místa dotyku referenčního elipsoidu a střední koule.

## 2.2 Souřadnicové systémy

Nejen v teorii tíhového pole je nutné přesně lokalizovat místa, ve kterých proběhlo měření. Proto je velmi důležitá volba souřadnicového systému. Při řešení parametrů tíhového pole, které rotuje se Zemí, je výhodné použít geocentrický systém, který také rotuje se Zemí. Proto se využívá především geocentrický zemský systém.

### 2.2.1 Geocentrický zemský souřadnicový systém

Geocentrický souřadnicový systém je ortogonální systém rotující se Zemí. Lze jej definovat pomocí sedmi parametrů:

- tři parametry pro určení počátku
- tři parametry pro určení orientace souřadnicových os
- jeden parametr pro určení měřítka souřadnicových os<sup>1</sup>

Počátek tohoto systému je volen v těžišti Země. Osa  $x$  prochází nultým poledníkem (Greenwich) v rovině rovníku, osa  $z$  je identická se střední rotační osou Země pro dané

<sup>1</sup> V trojrozměrném prostoru je obecně nutná znalost metrického tenzoru, který určuje měřítka na všech třech souřadnicových osách a orientaci os. V tomto speciálním případě, kdy je na všech navzájem kolmých osách měřítka stejné, stačí k určení systému pouze jeden parametr.

období a osa  $y$  je definována tak, aby výsledná soustava byla pravouhlá (rovina  $xy$  je rovinou rovníku) a pravotočivá.

Tento model geocentrického souřadnicového systému nezohledňuje fakt, že Země se stále deformuje (vlivem pohybu zemských desek, zemských slapů apod.). Pro deformující se Zemi prochází osa  $x$  středním nultým poledníkem pro období 1900-1906 a osa  $z$  je střední osa rotace Země pro totéž období. Geocentrický souřadnicový systém pro deformující se Zemi je každý rok nově definován na základě měření technologiemi kosmické geodézie: VLBI (Very Long Baseline Interferometry), SLR (Satellite Laser Ranging), LLR (Lunar Laser Ranging), GPS (Global Positioning System).

Referenční souřadnicový systém je realizován *referenčním rámcem*. Referenční rámeček je katalog souřadnic globální sítě stanic, které implicitně definují počátek, orientaci os a měřítko rámečku. Poloha stanic je určena s centimetrovou přesností, výsledné souřadnice jsou však ovlivňovány decimetrovými periodickými pohyby stanic. Pro geocentrický souřadnicový systém existuje rámeček ITRF (International Terrestrial Reference Frame – Mezinárodní zemský referenční rámeček), který je každoročně publikován IERS (International Earth Rotation Service – Mezinárodní služba rotace Země).

## 2.2.2 Geocentrický geodetický souřadnicový systém

Geocentrický geodetický systém je spojen s referenčním elipsoidem. Tím se liší od geocentrického zemského systému, jehož osy jsou definovány tak, aby měly fyzikální smysl. Počátek geodetického systému je umístěn ve středu elipsoidu. Osa  $x$  opět prochází středním nultým poledníkem (Greenwich), osa  $z$  je určena rotační osou elipsoidu a osa  $y$  je definována tak, aby výsledná soustava byla opět pravouhlá a pravotočivá. V geocentrickém geodetickém systému jsou realizována měření GPS.

Referenční geodetický systém je dnes realizován systémem GRS 80, jehož parametry jsou odvozeny z měření na globální síti satelitních stanic.

### 2.2.3 Typy souřadnic

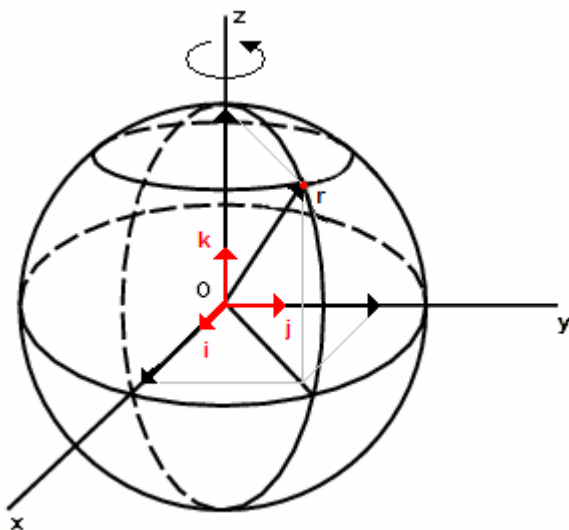
Ve výše uvedených souřadnicových systémech je možné použít pravoúhlé (kartézské) souřadnice  $(x,y,z)$  nebo křivočaré souřadnice. Vzhledem k referenčním plochám používaným při řešení tíhového pole je někdy výhodnější použití křivočarých souřadnic, speciálně sférických  $(\theta,\lambda,r)$  nebo tzv. Jacobiho elipsoidálních souřadnic  $(\phi,\lambda,u)$ . Gaussovy elipsoidální souřadnice  $(\phi,\lambda,h)$  nejsou v teorii potenciálu příliš praktické<sup>2</sup>, v této práci jsou ale zmíněny, protože se využívají při měření pomocí GPS.

#### Pravoúhlé (kartézské) souřadnice<sup>3</sup>

Pravoúhlé souřadnice jsou určeny průsečíky os s daným tělesem, např. střední koulí. Každý bod na této referenční ploše lze považovat za koncový bod vektoru  $\mathbf{r}$ , který je umístěn v počátku souřadnicového systému (průvodič bodu). Poloha bodu je určena jako lineární kombinace jednotkových vektorů  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  ležících postupně v osách  $x, y, z$ :

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} . \quad (2.8)$$

Koeficienty  $x, y, z$  jsou pravoúhlé souřadnice daného bodu.



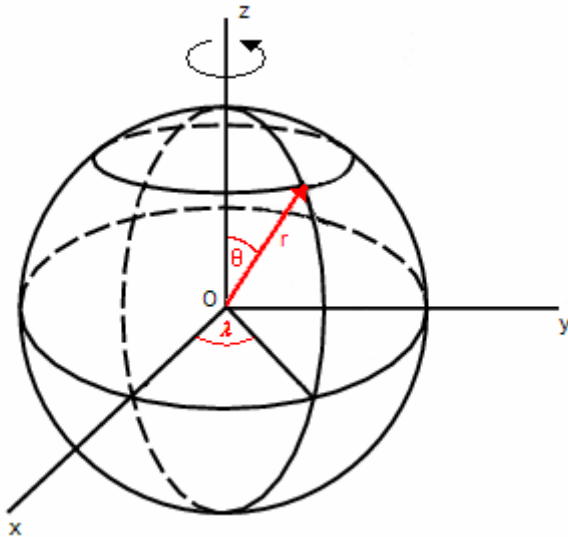
Obrázek 2-2: Kartézské souřadnice

<sup>2</sup> Gaussovy souřadnice jsou dvouparametrické elipsoidální souřadnice, které jsou příliš komplikované pro řešení některých úloh. Nelze v nich například provést separaci proměnných při řešení Laplaceovy diferenciální rovnice.

<sup>3</sup> Souřadnice jsou pojmenovány po francouzském matematikovi a filozofovi René Descartovi (1596-1650).

Sférické souřadnice

Poloha bodu je dána délkou průvodiče bodu  $r$  a úhly  $\theta, \lambda$ . Pro délku  $r$  průvodiče bodu platí vztah  $r = |\mathbf{r}|$ , kde  $\mathbf{r}$  je vektor definovaný v rovnici (2.8). Pólová vzdálenost  $\theta$  je úhel mezi průvodičem  $r$  a osou  $z$ , sférická délka  $\lambda$  je úhel mezi osou  $x$  a průmětem průvodiče  $r$  do roviny  $xy$  (rovina rovníku). Úhly nabývají hodnot  $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$ ,  $\lambda \in \langle 0, 2\pi \rangle$ .



Obrázek 2-3: Sférické souřadnice

Převodní vztahy mezi pravoúhlými a sférickými souřadnicemi:

- pravoúhlé souřadnice  $\rightarrow$  sférické souřadnice:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\lambda = \arctan \frac{y}{x}, \quad (2.9)$$

$$\theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \arccos \frac{z}{r};$$

- sférické souřadnice  $\rightarrow$  pravoúhlé souřadnice:

$$x = r \sin \theta \cos \lambda,$$

$$y = r \sin \theta \sin \lambda, \quad (2.10)$$

$$z = r \cos \theta.$$

Elipsoidální souřadnice*Gaussovy elipsoidální souřadnice* (geodetické souřadnice)

Gaussovy souřadnice (dvouparametrické) se vztahují k rotačnímu elipsoidu. Bod je určen pomocí výšky nad elipsoidem  $h$ , příčným poloměrem křivosti  $N$  a pomocí úhlů  $\varphi, \lambda$ . Geodetická šířka  $\varphi$  určuje odchylku normály elipsoidu v daném bodě od roviny  $xy$ , geodetická délka  $\lambda$  je úhel mezi osou  $x$  a průmětem normály elipsoidu do roviny  $xy$ . Úhly nabývají hodnot  $\varphi \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ ,  $\lambda \in \langle 0, 2\pi \rangle$ .

Převodní vztahy mezi pravoúhlými a Gaussovými souřadnicemi (Heiskanen a Moritz 1967):

- pravoúhlé souřadnice  $\rightarrow$  Gaussovy souřadnice (iterační vztahy):

$$\begin{aligned}\lambda &= \arctan \frac{y}{x}, \\ h &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos \varphi} - N, \\ \varphi &= \arctan \left( \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left( 1 - e^2 \frac{N}{N+h} \right)^{-1} \right),\end{aligned}\tag{2.11}$$

kde  $e$  je první numerická výstřednost a  $N$  je příčný poloměr křivosti elipsoidu

$$N(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}};\tag{2.12}$$

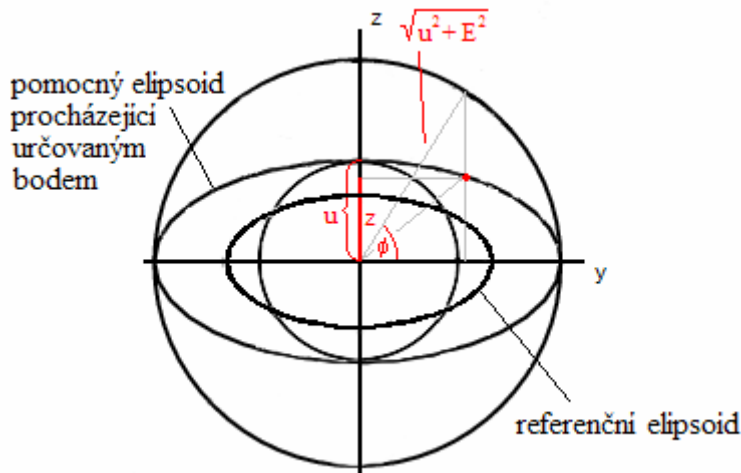
- Gaussovy souřadnice  $\rightarrow$  pravoúhlé souřadnice:

$$\begin{aligned}x &= (N+h) \cos \varphi \cos \lambda, \\ y &= (N+h) \cos \varphi \sin \lambda, \\ z &= [N(1-e^2) + h] \sin \varphi.\end{aligned}\tag{2.13}$$

*Jacobiho elipsoidální souřadnice*

Jacobiho souřadnice (jednparametrické) jsou také vztaženy k rotačnímu elipsoidu. Bod je určen vedlejší poloosou  $u$  elipsoidu s lineární excentricitou  $E$  a úhly  $\phi, \lambda$ . Úhel  $\phi$  je redukovaná šířka daného bodu,  $\lambda$  (geocentrická délka) je úhel mezi osou  $x$  a průmětem

průvodiče do roviny  $xy$ . Ve speciálním případě, kdy určený bod leží na elipsoidu, je vedlejší poloosa  $u$  rovna velikosti vedlejší poloosy  $b$  elipsoidu. Úhly obdobně jako v předchozích případech nabývají hodnot  $\phi \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ ,  $\lambda \in \langle 0, 2\pi \rangle$ .



Obrázek 2-4: Jacobiho elipsoidální souřadnice

Převodní vztahy mezi pravoúhlými a Jacobiho souřadnicemi (Bölling a Grafarend 2005):

- pravoúhlé souřadnice  $\rightarrow$  Jacobiho souřadnice:

$$u = \left( \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 - E^2) + \sqrt{\frac{1}{4}(x^2 + y^2 + z^2 - E^2)^2 + E^2 z^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\phi = \arctan \left( \frac{z \sqrt{u^2 + E^2}}{u \sqrt{x^2 + y^2}} \right), \quad (2.14)$$

$$\lambda = \arctan \frac{y}{x},$$

kde  $E$  je lineární excentricita

$$E = \sqrt{a^2 - b^2}; \quad (2.15)$$

- Jacobiho souřadnice  $\rightarrow$  pravoúhlé souřadnice:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{u^2 + E^2} \cos \phi \cos \lambda, \\ y &= \sqrt{u^2 + E^2} \cos \phi \sin \lambda, \\ z &= u \sin \phi. \end{aligned} \quad (2.16)$$

### 2.3 Geodetický referenční systém 1980 (GRS 80)

Systém GRS 80 (Moritz 1984), který je definován organizací IAG (International Association of Geodesy – Mezinárodní geodetická asociace), byl přijat v prosinci 1979. Nahradil geodetický referenční systém 1967. Referenčním tělesem se opět stal rotační hladinový elipsoid<sup>4</sup> definovaný pomocí čtyř základních konstant (Moritz 1984):

- hlavní poloosa elipsoidu  $a = 6378137$  m
- geocentrická gravitační konstanta (včetně atmosféry)  $GM = 3986005 \times 10^8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$
- dynamický faktor určující zploštění Země (bez trvalých slapových deformací)  $J_2 = 108263 \times 10^{-8}$  (zonální Stokesův koeficient 2. stupně)
- úhlová rychlost rotace Země  $\omega = 7292115 \times 10^{-11} \text{ s}^{-1}$ .

Hladinový elipsoid je těleso, jehož povrch je hladinová plocha normálního tíhového pole s danou konstantní hodnotou potenciálu  $U_0$ . Konstanta  $U_0$  je definována vztahem

$$U_0 = W_0, \quad (2.17)$$

kde  $W_0$  je hodnota skutečného tíhového potenciálu na geoidu. Kolem tohoto elipsoidu existuje tíhové pole, které se nazývá normální tíhové pole a které popisuje tíhový potenciál  $U$ . Intenzita normálního tíhového pole  $\gamma$  (normální tíhové zrychlení) na povrchu elipsoidu je popsána rovnicí (Moritz 1984)

$$|\gamma| = \gamma(\varphi) = \frac{a\gamma_e \cos^2 \varphi + b\gamma_p \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (2.18)$$

kde konstanta  $\gamma_e$  označuje velikost normálního tíhového zrychlení na rovníku,  $\gamma_p$  je velikost normálního tíhového zrychlení na pólech a  $\varphi$  je geodetická šířka.

Hladinový elipsoid velmi dobře nahrazuje tvar geoidu. Také jeho normální tíhové pole je velmi přesnou náhradou skutečného tíhového pole Země. Proto je možné omezit se při řešení tíhového pole Země (popř. geoidu jako jeho konkrétní hladinové plochy) pouze na určování odchylek skutečného tíhového pole od normálního tíhového pole.

---

<sup>4</sup> Teorii hladinového elipsoidu poprvé rozpracoval italský matematik Paolo Pizzetti (1860-1918) v roce 1894. Jeho myšlenku dále zpracoval italský matematik Carlo Somigliana (1860-1955) v roce 1929.

## 2.4 Typy geodetických výšek

**Výška bodu** je definována jako vzdálenost tohoto bodu od referenční plochy měřená podél dané křivky. Proto je nutné při určování výšek nejdříve zvolit referenční plochu. Rozlišujeme několik typů geodetických výšek, které se liší nejen referenčními plochami a definicí vzdálenosti bodu nad danou referenční plochou, ale také fyzikálním významem. Fyzikální výšky jsou ovlivněny tíhovým polem Země. Jejich referenční plochou je geoid či kvazigeoid a lze je určit nivelací. Mezi fyzikální výšky patří *ortometrické výšky* (geoid), jejichž aproximací jsou *normální výšky* (kvazigeoid). Výšky, které nejsou ovlivněny působením tíhového pole Země, se nazývají geometrické. Mezi geometrické výšky patří *elipsoidální (geodetické) výšky*. Jejich referenční plochou je referenční elipsoid.

Referenční plochou ortometrických výšek je geoid. Ortometrická výška bodu  $H^o$  je definována jako délka prostorové tížnice  $t$  mezi daným bodem na povrchu Země a geoidem, platí tedy vztah (Blažek, Skořepa 1999)

$$H^o = \frac{1}{\bar{g}_m} \int g(h) dh, \quad (2.19)$$

kde  $\bar{g}_m$  je integrální střední hodnota tíže podél tížnice  $t$ .

Tímto způsobem nelze ale ortometrické výšky spočítat, protože nejsou známy hodnoty tíhového zrychlení podél tížnice  $t$ . Proto se při výpočtu využívají jiné hodnoty, které jsou známé. Střední hodnota tíže  $\bar{g}_m$  se nejčastěji odhaduje z měření tíže na povrchu Země. Ortometrické výšky jsou ovlivněny tíhovým polem Země a lze je odvodit z nivelovaných výškových rozdílů. Velikost tíhového zrychlení roste směrem od rovníku k pólu, z toho plyne, že hladinové plochy se směrem k pólům sbíhají.

Normální (Moloděnského) výšky  $H^N$  jsou vztaženy ke kvazigeoidu. Stejně jako ortometrické výšky respektují skutečné tíhové pole a určují se z nivelovaných výškových rozdílů. Jsou definovány vztahem (Blažek, Skořepa 1999)

$$H^N = \frac{1}{\bar{\gamma}_m} \int g(h) dh, \quad (2.20)$$

kde  $\bar{\gamma}_m$  je střední hodnota normálního tíhového zrychlení podél normály elipsoidu  $n$  v určovaném bodě. Tento druh výšek se používá ve většině evropských zemí včetně ČR.



Elipsoidální výšky se od předchozích výšek liší především skutečností, že nerespektují tíhové pole. Elipsoidální výška bodu  $h$  je vzdálenost bodu na zemském povrchu od referenčního elipsoidu měřená podél normály elipsoidu. Je výsledkem měření technologií GPS.

### 2.4.1 Transformace výšek

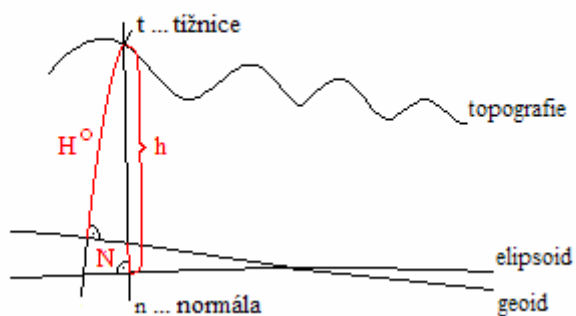
Skutečnost, že různé výšky používají různé referenční plochy, vede k nutnosti přesného určení těchto ploch. Potom bude možné převádět ortometrické a normální výšky získané pouze nivelací na elipsoidální (určované pomocí GPS) a naopak. Problémem je tedy určení geoidu, resp. kvazigeoidu. Vztahy mezi ortometrickou výškou  $H^o$  a elipsoidální výškou  $h$  popisuje obr. 2-5 ( $N$  je geoidální výška, vyjadřující převýšení geoidu nad referenčním elipsoidem). Pro výšky tedy platí vztah

$$h - N \cong H^o. \quad (2.21)$$

Obdobný vztah platí také pro normální výšky  $H^N$ , které jsou vztaženy ke kvazigeoidu

$$h - \zeta = H^N, \quad (2.22)$$

kde  $\zeta$  je výšková anomálie, které popisuje převýšení kvazigeoidu nad referenčním elipsoidem.



Obrázek 2-5: Vztah mezi ortometrickou, elipsoidální a geoidální výškou

### 3 Základy teorie tíhového pole Země

Tato kapitola se zabývá geodetickým popisem skutečného tíhového pole Země a tíhového pole referenčního elipsoidu (normální tíhové pole), které aproximuje skutečné tíhové pole. Dále jsou zde definovány veličiny charakterizující poruchové tíhové pole, které popisuje odchylky normálního a skutečného tíhového pole.

#### 3.1 Skutečné tíhové pole Země

Země jako každé hmotné těleso kolem sebe vytváří gravitační pole, které je možné popsat gravitačním zrychlením  $\mathbf{a}_g$ . Vzhledem k tomu, že Země rotuje kolem své osy, působí v bodech spojených se zemským povrchem také odstředivé zrychlení  $\mathbf{a}_c$ . Vektorovým součtem gravitačního zrychlení  $\mathbf{a}_g$  a odstředivého zrychlení  $\mathbf{a}_c$  získáme vektor tíhového zrychlení  $\mathbf{g}$  čili vektor intenzity tíhového pole Země.

Tíhové pole Země je vektorové pole. Jednou z jeho základních charakteristik je vektor tíhového zrychlení  $\mathbf{g}$ . Tento vektor (především jeho vertikální složka) je měřitelný, proto by bylo možné pomocí něho popsat tíhové pole Země. Tento popis by ale byl velmi nepraktický, neboť tíhové pole by bylo určeno v každém bodě vektorem, který má ve třírozměrném prostoru tři složky. Výhodnější je popis, kde je v každém bodě tíhové pole určeno pouze pomocí jedné hodnoty, tedy popis tíhového pole pomocí skalárních hodnot.

Obecně lze vektorové pole popsané vektorem intenzity  $\mathbf{g}'$  popsat také pomocí skalárních hodnot, pokud je toto pole na dané množině  $M$  konzervativní a netočivé. Vektorové pole na množině  $M$  je konzervativní, pokud pro každou jednoduchou po částech hladkou orientovanou uzavřenou křivku  $C$  na  $M$  platí, že práce vykonaná podél této křivky je nulová, tj.

$$\oint_C \mathbf{g}'(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 0. \quad (3.1)$$

Pro následující tvrzení je nutné, aby množina  $M$  byla otevřená. Pro každý její bod tedy musí existovat koule, jejíž střed je v daném bodě a která je podmnožinou množiny  $M$  (celá

koule se vejde do  $M$ ). Potom pro každé konzervativní vektorové pole  $\mathbf{G}$  na množině  $M$  existuje skalární funkce  $V$  na  $M$  taková, že

$$\mathbf{g}'(\mathbf{r}) = \nabla V(\mathbf{r}). \quad (3.2)$$

Vektorové pole s vektorem intenzity  $\mathbf{g}'$ , ke kterému existuje skalární funkce  $V$  tak, že platí rovnice (3.2), se nazývá gradientní.

Druhá podmínka pro možnost popisu vektorového pole pomocí skalární funkce je netočivost vektorového pole. Tato podmínka plyne přímo z rovnice (3.2). Prostorová točivost (cirkulace) vektoru je charakterizována vektorovou veličinou, která se nazývá rotace (viz Dodatek A, rov. A.5). Vektorové pole s vektorem intenzity  $\mathbf{g}'$  je netočivé, pokud je rotace vektoru  $\mathbf{g}'$  nulová, tj. platí

$$\text{rot } \mathbf{g}'(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{g}'(\mathbf{r}) = \mathbf{o}, \quad (3.3)$$

kde  $\mathbf{o}$  je nulový vektor ( $|\mathbf{o}|=0$ ) a symbol  $\times$  značí vektorový součin. Budeme předpokládat, že platí vztah uvedený v rovnici (3.2). Ten je možné dále upravit užitím operátoru rotace na tvar

$$\nabla \times \mathbf{g}'(\mathbf{r}) = \nabla \times \nabla V(\mathbf{r}). \quad (3.4)$$

Z definice gradientu (viz Dodatek A, rov. A.2) a rotace přímo vyplývá, že rotace gradientu je nulová, tj.

$$\nabla \times \nabla V(\mathbf{r}) = \mathbf{o}. \quad (3.5)$$

Po dosazení rovnice (3.5) do rovnice (3.4) je zřejmé, že pokud platí rovnice (3.2), musí také platit vztah

$$\nabla \times \mathbf{g}'(\mathbf{r}) = \mathbf{o}, \quad (3.6)$$

tj. vektorové pole musí být netočivé (nerotační, nevírové).

Tíhové pole Země, které je v každém bodě popsáno vektorem intenzity  $\mathbf{g}$  (vektorem tíhového zrychlení), je konzervativní a netočivé vektorové pole. Vektor tíhového zrychlení  $\mathbf{g}$  lze tedy zapsat jako gradient tíhového potenciálu  $W$  (gradient tíhového potenciálu je vzhledem ke znaménkové konvenci psán se znaménkem mínus)

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\nabla W(\mathbf{r}). \quad (3.7)$$

### 3.1.1 Potenciál skutečného tíhového pole Země

Vzhledem ke skutečnosti, že tíhové zrychlení  $\mathbf{g}$  vzniklo vektorovým součtem gravitačního a odstředivého zrychlení, lze tíhový potenciál  $W$  popisující tíhové pole Země také rozdělit na dvě složky – gravitační<sup>5</sup>  $W_g$  a odstředivou<sup>6</sup>  $W_c$ . Složky tíhového pole v bodě určeném průvodičem  $\mathbf{r}_A$  jsou popsány vztahy v rovnicích (3.8) a (3.9) (Bölling a Grafarend 2005; Novák 2003):

$$W_g(\mathbf{r}_A) = G \iiint_B \frac{\rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_A|} dB(\mathbf{r}), \quad (3.8)$$

kde  $B$  je objem Země,  $dB$  je objemový element,  $\mathbf{r}$  je průvodič objemového elementu  $dB$ ,  $\rho(\mathbf{r})$  je hustota zemských hmot v objemovém elementu  $dB$  (hmoty nejsou v zemském tělese rozloženy rovnoměrně, proto je hustota  $\rho$  funkcí třírozměrného vektoru  $\mathbf{r}$ );

$$W_c(\mathbf{r}_A) = \frac{1}{2} p_A^2 \omega^2, \quad (3.9)$$

kde  $\omega$  je úhlová rychlost rotace Země,  $p_A$  je ortogonální průmět vektoru  $\mathbf{r}_A$  na osu rotace Země, tedy ve sférických souřadnicích platí

$$p_A^2 = r_A^2 \sin^2 \theta, \quad r_A = |\mathbf{r}_A|. \quad (3.10)$$

K výpočtu zemského tíhového potenciálu lze ale využít pouze vztah pro odstředivý potenciál  $W_c$ , ve kterém jsou známy všechny potřebné hodnoty. Ve vztahu pro gravitační potenciál  $W_g$  je neznámou hodnotou hustota zemských hmot  $\rho$ , která neumožňuje přesnější výpočet gravitačního potenciálu  $W_g$  z rovnice (3.8). Tíhový potenciál  $W$  tedy nelze počítat přímo součtem gravitační a odstředivé složky, ale je nutné určit jeho hodnoty z nepřímě naměřených tíhových dat. Měřená data představují především hodnoty tíhového zrychlení  $\mathbf{g}$ .

Pokud se tíhový potenciál  $W$  určuje z měření na bodech, které nejsou spojeny se Zemí (tj. měří se pouze gravitační složka  $\mathbf{a}_g$  tíhového zrychlení), určí se pouze gravitační složka tíhového potenciálu  $W_g$ . Tíhový potenciál  $W$  je potom možné získat jako součet gravitační složky  $W_g$  určené z měření a odstředivé složky  $W_c$ , kterou je možné spočítat pro

<sup>5</sup> Newton, Isaac (1643-1727) – anglický matematik a fyzik

<sup>6</sup> Huygens, Christiaan (1629-1695) – holandský matematik a fyzik

libovolný bod na zemském povrchu. Z tíhových měření na zemském povrchu získáme celkový tíhový potenciál  $W$ , který obsahuje odstředivou i gravitační složku.

Tíhový potenciál  $W$  splňuje Poissonovu diferenciální rovnici 2. řádu (Heiskanen a Moritz 1967)

$$\nabla^2 W(\mathbf{r}) = -4\pi G\rho(\mathbf{r}) + 2\omega^2, \quad (3.11)$$

kde  $G$  je univerzální gravitační konstanta,  $\rho(\mathbf{r})$  hustota tělesa v daném bodě a  $\omega$  úhlová rychlost Země. Za následujícího předpokladu můžeme Poissonovu rovnici zjednodušit. Budeme uvažovat tíhový potenciál pouze vně Země (vně hmot zemského tělesa). Pokud zanedbáme hustotu hmot ve vnějším okolí Země, v tomto případě hustotu atmosféry, je  $\rho(\mathbf{r}) = 0$  a Poissonova rovnice se zjednoduší do tvaru

$$\nabla^2 W(\mathbf{r}) = 2\omega^2. \quad (3.12)$$

Pokud při výpočtech uvažujeme body, které nerotují se Zemí (tj.  $\omega = 0$ ), získáme pro tíhový potenciál  $W$  vztah, který se nazývá *Laplaceova diferenciální rovnice* (Heiskanen a Moritz 1967):

$$\nabla^2 W(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.13)$$

V bodech spojených se Zemí, pro které je  $\omega \neq 0$ , tíhový potenciál  $W$  Laplaceovu diferenciální rovnici nespĺňuje. Ve skutečnosti se však při výpočtu neurčuje přímo tíhový potenciál  $W$ , ale poruchový tíhový potenciál  $T$ , u kterého tento problém již nenastává (viz kap. 3.3).

Při řešení gravitačního potenciálu  $W_g$  z naměřených dat je také velmi důležitá jeho regularita v nekonečnu, která plyne z vlastností Newtonova objemového integrálu (viz Dodatek D, rov. D.11). Newtonův objemový integrál, který určuje hodnotu gravitačního potenciálu v daném bodě, je pro  $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$  roven 0, tedy gravitační potenciál  $W_g$  je v nekonečnu nulový.

### 3.1.2 Reprezentace gravitačního potenciálu metodou spektrálního rozkladu

Při určování tíhového potenciálu  $W$  lze obecně postup řešení rozdělit na dvě základní části – určení nízkofrekvenční (globální, dlouhovlnné) složky a vysokofrekvenční

(reziduální, krátkovlnné) složky tíhového potenciálu. Nízkofrekvenční složka tíhového potenciálu je většinou řešena metodou spektrálního rozkladu, při které se využívá družicových tíhových měření (viz kap. 4.1.1, 4.2.1). Řešení se hledá při použití následujících zjednodušujících předpokladů:

- tíhová měření jsou opravena o gravitační vliv atmosféry a jiných těles, především Měsíce a Slunce (opravy zahrnují také vlivy, které se mění v čase, např. slapy);
- Země je tuhé, nedeforovatelné těleso s konstantní rotační rychlostí  $\omega$ , rotující kolem pevné osy procházející středem Země.

Gravitační složka tíhového potenciálu  $W_g$  splňuje v bodech vně Země Laplaceovu diferenciální rovnici

$$\nabla^2 W_g(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.14)$$

je tedy vně Země harmonickou funkcí. Laplaceovu diferenciální rovnici je možné řešit například metodou separace proměnných. Při naší volbě souřadnicových systémů (viz kap. 2.2) lze separaci provést v kartézských, sférických nebo Jacobiho elipsoidálních souřadnicích. Vzhledem ke tvaru Země je výhodnější použití křivočarých souřadnic. Vhodné jsou především Jacobiho elipsoidální souřadnice, neboť Země má přibližně tvar rotačního elipsoidu. Řešení, které získáme při použití Jacobiho souřadnic, je ale mnohem složitější než řešení ve sférických souřadnicích. Proto budou dále použity sférické souřadnice  $(r, \theta, \lambda)$  (viz kap. 2.2.3). Laplaceův operátor má ve sférických souřadnicích tvar (viz Dodatek B, rov. B.3)

$$\nabla^2 W_g(r, \theta, \lambda) = \frac{\partial^2 W_g}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial W_g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W_g}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial W_g}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 W_g}{\partial \lambda^2}. \quad (3.15)$$

Řešení se hledá ve formě substituce

$$W_g(r, \theta, \lambda) = f(r)g(\theta)h(\lambda), \quad (3.16)$$

kde funkce  $g(\theta)h(\lambda)$  popisuje gravitační potenciál na Brillouinově kouli (minimální koule o poloměru  $R$ , která "obsahuje" celou Zemi), funkce  $f(r)$  popisuje změnu gravitačního potenciálu v radiálním směru.

Rozvojem funkce  $W_g$  do řady vlastních funkcí (sférických harmonických funkcí)

$$Y_{n,m}^c(\theta, \lambda) = \cos m\lambda P_{n,m}(\cos \theta), \quad (3.17)$$

a

$$Y_{n,m}^s(\theta, \lambda) = \sin m\lambda P_{n,m}(\cos \theta), \quad (3.18)$$

získáme sférickou harmonickou řadu (Heiskanen a Moritz 1967; Shen a Ning 2005)

$$W_g(r, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n f_n(r) (\bar{A}_{n,m} \cos m\lambda + \bar{B}_{n,m} \sin m\lambda) \bar{P}_{n,m}(\cos \theta), \quad (3.19)$$

kde  $G$  je Newtonova gravitační konstanta,  $M$  je hmotnost Země,  $R$  je poloměr střední koule,  $\bar{A}_{n,m}$  a  $\bar{B}_{n,m}$  jsou normované Stokesovy koeficienty a  $\bar{P}_{n,m}$  je normovaná přidružená Legendreova funkce prvního druhu (viz Dodatek C, rov. C.7). Funkce  $f_n(r)$  závisí na vztahu poloměru  $R$  střední koule a délce průvodiče  $r$  bodu, ve kterém je určována hodnota gravitačního potenciálu. Laplaceova diferenciální rovnice platí pouze pro body vně Země. Pokud Zemi nahradíme koulí o poloměru  $R$ , má řešení ve formě sférické harmonické řady smysl pouze pro body s  $r \geq R$ . V tomto případě má funkce  $f_n(r)$  tvar

$$f_n(r) = \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}. \quad (3.20)$$

V opačném případě, kdy  $r < R$ , má funkce  $f_n(r)$  tvar

$$f_n(r) = \left(\frac{r}{R}\right)^n. \quad (3.21)$$

Řadu popsanou v rovnici (3.19) je možné zapsat také ve tvaru

$$W_g(r, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{r} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^n (\bar{A}_{n,m} \cos m\lambda + \bar{B}_{n,m} \sin m\lambda) \bar{P}_{n,m}(\cos \theta) \right], \quad (3.22)$$

kteřý formou zápisu odpovídá sférické harmonické řadě popisující rozvoj normálního gravitačního potenciálu  $U_g$  – viz rov. (3.33).

Způsob určení gravitačního potenciálu pomocí součtu sférické harmonické řady se nazývá *sférická harmonická syntéza*. Tento způsob výpočtu předpokládá znalost tzv. Stokesových koeficientů. Ty lze teoreticky určit pomocí vztahů (Heiskanen a Moritz 1967)

$$A_{n,m} = \frac{1}{S} \oint_S W_g(R, \theta, \lambda) \cos m\lambda P_{n,m}(\cos \theta) dS, \quad (3.23)$$

$$B_{n,m} = \frac{1}{S} \oint_S W_g(R, \theta, \lambda) \sin m\lambda P_{n,m}(\cos \theta) dS, \quad (3.24)$$

kde  $S = 4\pi R^2$  je povrch koule o poloměru  $R$ ,  $W(R, \theta, \lambda)$  je tíhový potenciál na této kouli,  $dS = R^2 d\theta \sin \theta d\lambda$  je plošný element na kouli o poloměru  $R$ ,  $P_{n,m}(\cos \theta)$  je přidružená Legendreova funkce prvního druhu (viz Dodatek C, rov. C.3) stupně  $n$  a řádu  $m$ .

Určení Stokesových koeficientů z výše uvedených vztahů se nazývá *sférická harmonická analýza*. Toto řešení však v případě gravitačního potenciálu prakticky nelze využít, neboť k výpočtu obou koeficientů je nutná znalost gravitačního potenciálu  $W_g$  na kouli o poloměru  $R$ . Proto se Stokesovy koeficienty musí určit jiným způsobem. K jejich výpočtu se využívají především družicová data, díky nimž je dnes možné popsat globální (nízkofrekvenční) model tíhového potenciálu určený Stokesovými koeficienty přibližně do řádu  $n=150$ . Maximální stupeň a řád určených koeficientů vymezuje nízkofrekvenční složku tíhového potenciálu. Koeficienty, které již není možné vzhledem k vysokofrekvenčnímu šumu určit z družicových měření, popisují vysokofrekvenční složku tíhového potenciálu, jejímž určením se zabývá kap. 5.

Kvůli numerické stabilitě se při výpočtu řady v rovnici (3.19) využívají plně normované Stokesovy koeficienty  $\bar{A}_{n,m}, \bar{B}_{n,m}$  a plně normované Legendreovy funkce prvního druhu  $\bar{P}_{n,m}(\cos\theta)$ . Je možné použít různé normalizační faktory, např. normalizační faktor  $\alpha_{n,m}$  (Heiskanen a Moritz 1967):

$$\alpha_{n,m} = \sqrt{\frac{2(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!}} \text{ pro } m \neq 0, \quad (3.25)$$

$$\alpha_n = \sqrt{2n+1} \text{ pro } m = 0. \quad (3.26)$$

Koeficienty  $\bar{A}_{n,m}, \bar{B}_{n,m}$  a funkce  $\bar{P}_{n,m}(\cos\theta)$  jsou potom určeny vztahy

$$\bar{A}_{n,m} = \alpha_{n,m} A_{n,m}, \quad (3.27)$$

$$\bar{B}_{n,m} = \alpha_{n,m} B_{n,m}, \quad (3.28)$$

$$\bar{P}_{n,m}(\cos\theta) = \alpha_{n,m}^{-1} P_{n,m}(\cos\theta). \quad (3.29)$$

### 3.2 Tíhové pole referenčního elipsoidu (normální tíhové pole)

V kapitole 2.3 byl definován mezinárodní referenční elipsoid, jehož tíhové pole, které se nazývá normální tíhové pole, je možné matematicky přesně popsat. Tento referenční elipsoid má stejnou hmotnost jako Země a rotuje kolem své vedlejší osy rychlostí  $\omega$ , která je rovna úhlové rychlosti rotace Země. Osa rotace elipsoidu prochází stejným těžištěm jako osa rotace Země. Povrch elipsoidu tvoří hladinová plocha



normálního tíhového pole, jejíž potenciál  $U_0$  je roven potenciálu  $W_0$  na povrchu geoidu. Stejně jako daný referenční elipsoid velmi dobře nahrazuje tvar geoidu, jeho tíhové pole s vysokou přesností nahrazuje skutečné tíhové pole Země.

Normální tíhové pole je v každém bodě popsáno vektorem normálního tíhového zrychlení  $\gamma$ . Vzhledem ke skutečnosti, že normální tíhové pole je také konzervativní a netočivé, lze ho obdobně jako skutečné tíhové pole popsat pomocí gradientu skalárního pole:

$$\gamma(r, \theta) = -\nabla U(r, \theta), \quad (3.30)$$

kde  $U$  je potenciál normálního tíhového pole,  $(r, \theta)$  jsou sférické souřadnice.

Tíhové pole referenčního elipsoidu je vně elipsoidu matematicky popsáno, proto jsou při výpočtech hodnoty normálního tíhového zrychlení  $\gamma$  a normálního potenciálu  $U$  uvažovány vždy jako známé.

### 3.2.1 Potenciál normálního tíhového pole

Popis normálního tíhového pole je velmi podobný popisu skutečného tíhového pole. Proto zde budou pouze zmíněny základní vlastnosti normálního tíhového pole a jeho potenciálu  $U$ , bez podrobnějšího odvozování.

Obdobně jako potenciál  $W$  skutečného tíhového pole Země lze i normální tíhový potenciál  $U$  rozdělit na dvě složky – gravitační  $U_g$  a odstředivou  $U_c$ . Pro odstředivou složku platí v Jacobiho elipsoidálních souřadnicích vztah (Bölling a Grafarend 2005)

$$U_c(u, \phi) = \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + E^2) \cos^2 \phi. \quad (3.31)$$

Normální tíhový potenciál  $U$  obecně splňuje také Poissonovu diferenciální rovnici (3.11). Za předpokladu, že určujeme normální tíhový potenciál v bodě vně elipsoidu, který navíc s elipsoidem nerotuje, můžeme Poissonovu rovnici zjednodušit na Laplaceovu rovnici

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.32)$$

Normální gravitační potenciál  $U_g$  je díky vlastnostem Newtonova objemového integrálu opět regulární v nekonečnu, tedy platí, že v nekonečnu nabývá nulové hodnoty

$$\left( \lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} U_g(\mathbf{r}) = 0 \right).$$

### 3.2.2 Reprezentace normálního tíhového potenciálu metodou spektrálního rozkladu

Při určování skutečného tíhového potenciálu  $W$  se v metodě spektrálního rozkladu Laplaceova diferenciální rovnice řešila metodou separace proměnných. Separace byla kvůli jednodušší formě výsledné řady provedena ve sférických souřadnicích. Pomocnou plochou, na které se řešil skutečný tíhový potenciál  $W$ , byla náhradní koule o poloměru  $R$ . Pokud použijeme stejné souřadnice i pro rozvoj gravitační složky normálního tíhového potenciálu  $U_g$ , harmonická řada se zjednoduší na tvar (Heiskanen a Moritz 1967)

$$U_g(r, \theta) = \frac{GM}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \left( \frac{R}{r} \right)^n J_n P_n(\cos \theta) \right], \quad (3.33)$$

kde  $R$  je poloměr střední koule,  $G$  je Newtonova gravitační konstanta,  $M$  je hmotnost Země,  $P_n$  je Legendreův polynom prvního druhu. Koeficient  $J_2$  je definován vztahem (Heiskanen a Moritz 1967; Ghilani 2004)

$$J_2 = \frac{2}{3}f - \frac{1}{3}m - \frac{1}{3}f^2 + \frac{2}{21}fm, \quad m = \frac{\omega^2 R^3}{GM}, \quad (3.34)$$

kde  $f$  je zploštění elipsoidu,  $m$  je geodetický parametr,  $\omega$  je úhlová rychlost rotace Země. Ostatní koeficienty ( $J_4, J_6, J_8, \dots$ ) jsou lineárními funkcemi koeficientu  $J_2$ .

Pro popis normálního gravitačního potenciálu je vhodnější použít místo sférických souřadnic Jacobiho elipsoidální souřadnice. Výsledná harmonická řada má obecně při použití elipsoidálních souřadnic komplikovanější tvar, ale vzhledem k symetrii normálního tíhového pole v ní vymizí všechny nezonální členy (členy s  $m \neq 0$ ). Proto je možné ji zapsat v uzavřeném tvaru (Heiskanen a Moritz 1967; Ghilani 2004)

$$U_g(u, \phi) = \frac{GM}{E} \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{E}{u} \right) + \frac{1}{2} \omega^2 a^2 \frac{q}{q_0} \left( \cos^2 \phi - \frac{1}{3} \right), \quad (3.35)$$

kde  $G$  je Newtonova gravitační konstanta,  $M$  je hmotnost Země,  $E$  je lineární excentricita,  $\omega$  je úhlová rychlost rotace Země,  $a$  je velikost hlavní poloosy referenčního elipsoidu, člen  $q$  je určen vztahem (Heiskanen a Moritz 1967; Ghilani 2004)

$$q = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + 3 \frac{u^2}{E^2} \right) \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{E}{u} \right) - 3 \frac{u}{E} \right], \quad (3.36)$$

člen  $q_0$  vztahem

$$q_0 = q|_{u=b}, \quad (3.37)$$

kde  $b$  je vedlejší poloosa referenčního elipsoidu.

### 3.3 Poruchové tíhové pole

Jak již bylo zmíněno v kapitole 3.1.1, pro výpočet tíhového potenciálu  $W$  se využívá i měření v bodech, které jsou pevně spojeny se Zemí a tedy nesplňují Laplaceovu diferenciální rovnici. V praxi se ale neřeší přímo skutečný tíhový potenciál  $W$ . Využívá se skutečnosti, že normální tíhové pole velmi dobře nahrazuje tíhové pole skutečné, a řeší se pouze odchylky mezi skutečným a normálním tíhovým potenciálem. Rozdíl mezi tíhovým potenciálem skutečným  $W$  a normálním  $U$  se nazývá poruchový tíhový potenciál a značí se  $T$ . Poruchový tíhový potenciál je tedy v bodě určeném průvodičem  $\mathbf{r}$  definován vztahem

$$T(\mathbf{r}) = W(\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}). \quad (3.38)$$

Hodnoty poruchového tíhového potenciálu  $T$  jsou v porovnání s hodnotami skutečného a normálního tíhového potenciálu velmi malé. Navíc potenciál  $T$  splňuje Laplaceovu rovnici i v bodech, které jsou spojeny se zemským povrchem. Tato vlastnost plyne přímo z definice. Pokud dosadíme poruchový tíhový potenciál do Poissonovy rovnice pro body vně hmot, které ale rotují se Zemí (tj.  $\omega \neq 0$ ), dostaneme vztah

$$\nabla^2 T(\mathbf{r}) = \nabla^2 W(\mathbf{r}) - \nabla^2 U(\mathbf{r}) = 2\omega^2 - 2\omega^2 = 0. \quad (3.39)$$

Laplaceova rovnice je tedy splněna pro všechny body vně Země a vně elipsoidu.

Tak jako je skutečné tíhové pole popsáno tíhovým zrychlením  $\mathbf{g}$  a normální tíhové pole normálním zrychlením  $\boldsymbol{\gamma}$ , lze i poruchové pole popsat ekvivalentní vektorovou veličinou, která se nazývá *tíhová porucha*. Značí se  $\delta\mathbf{g}$  a je definována vztahem

$$\delta\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{g}(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r}). \quad (3.40)$$

Veličina popisující směrovou odchylku mezi vektory skutečného a normálního tíhového zrychlení se nazývá *tížnicová odchylka* a značí se  $\Theta$ . Je to úhel mezi tížnicí v bodě určeném průvodičem  $\mathbf{r}$  a normálou k hladinové ploše normálního tíhového pole, která tímto bodem prochází

$$\Theta(\mathbf{r}) = \sphericalangle(\mathbf{n}, \mathbf{t})(\mathbf{r}). \quad (3.41)$$

Tížnicovou odchylku lze určit pomocí vztahu

$$\cos \Theta(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r})}{|\mathbf{n}(\mathbf{r})| |\mathbf{t}(\mathbf{r})|}, \quad (3.42)$$

kde  $\mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r})$  je skalární součin vektorů  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$  a  $\mathbf{t}(\mathbf{r})$ .

Tíhovou poruchu  $\delta \mathbf{g}$  a tížnicovou odchylku  $\Theta$  lze definovat v libovolném bodě. Pro poruchové tíhové pole Země má smysl definovat tyto dvě veličiny především v bodech na topografii, protože na zemském povrchu je možné měřit skutečné tíhové zrychlení  $\mathbf{g}$  a také je zde možné určit směr tížnice  $\mathbf{t}$ . Tížnicovou odchylku  $\Theta$  ve skutečnosti nelze určit z definice v rovnici (3.41), neboť tato rovnice obsahuje veličinu, která obvykle není známá (normála k hladinové ploše normálního tíhového pole procházející bodem určeným průvodičem  $\mathbf{r}$ ). V případě tíhové poruchy byla situace dlouho stejná. S nástupem technologie GPS ale došlo ke změně. Dnes je možné tíhovou poruchu určit, ale pouze v bodech zaměřených pomocí GPS. Protože tížnicovou odchylku  $\Theta$  a tíhovou poruchu  $\delta \mathbf{g}$  nelze přesně určit (tíhovou poruchu nelze určit pouze v bodech, které nejsou zaměřené pomocí GPS), je nutné aproximovat tyto poruchové veličiny pomocí veličin anomálních. Anomální veličiny jsou vztaženy ke dvěma bodům na různých plochách a je možné je určit z měření. Tíhová porucha  $\delta \mathbf{g}$  je nahrazována tíhovou anomálií  $\Delta \mathbf{g}$ , tížnicová odchylka  $\Theta$  je nahrazována anomálními tížnicovými odchylkami.

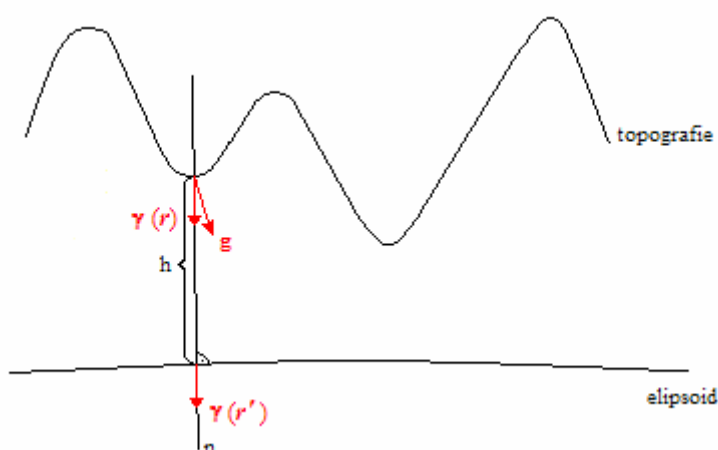
Všechny poruchové a anomální veličiny, které budou uvedeny v této kapitole, je možné definovat na libovolných plochách. Zde budeme uvažovat pouze některé konkrétní plochy, které mají praktický význam při řešení tíhového pole Země.

Budeme předpokládat, že tíhová porucha  $\delta \mathbf{g}(\mathbf{r})$  je definována v bodě ležícím na povrchu topografie, který je určen průvodičem  $\mathbf{r}$ . K jejímu výpočtu podle rov. (3.40) je nutná znalost hodnoty skutečného a normálního tíhového zrychlení. Skutečné tíhové zrychlení  $\mathbf{g}$  v bodech na povrchu topografie je měřitelné. Problémem byla tradičně hodnota normálního tíhového zrychlení  $\gamma$ . Velikost vektoru normálního tíhového zrychlení  $\gamma$  je možné určit pomocí Taylorova rozvoje normálního tíhového zrychlení  $\gamma$  z povrchu referenčního elipsoidu. Vzhledem k tomu, že tato řada rychle konverguje k nule, lze použít pouze její první dva, popř. tři členy řady. Výchozí hodnotou je hodnota

normálního tíhového zrychlení  $\gamma(\mathbf{r}')$  v bodě určeném průvodičem  $\mathbf{r}'$ , který leží na referenčním elipsoidu:

$$\gamma(\mathbf{r}) \doteq \gamma(\mathbf{r}') + \left. \frac{\partial \gamma}{\partial n} \right|_{\mathbf{r}'} h + \left. \frac{\partial^2 \gamma}{\partial n^2} \right|_{\mathbf{r}'} \frac{h^2}{2}. \quad (3.43)$$

Z rovnice (3.43) je zřejmé, že pro výpočet  $\gamma$  v bodech na topografii je nutné znát elipsoidální výšku  $h$  topografie nad referenčním elipsoidem – viz obr. 3-1.



Obrázek 3-1: Skutečné a normální tíhové zrychlení

Elipsoidální (geodetická) výška  $h$  je ale jednou ze souřadnic, které jsou určované pomocí GPS. Pokud tato hodnota není známá, nahrazuje se tíhová porucha tíhovou anomálií.

Tíhová anomálie  $\Delta g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')$  je definována obdobně jako tíhová porucha. Opět předpokládáme, že skutečné tíhové zrychlení  $\mathbf{g}(\mathbf{r})$  je změřeno v bodě na topografii, který je určen průvodičem  $\mathbf{r}$ . Tíhová anomálie se od tíhové poruchy liší bodem, ve kterém se určuje hodnota normálního tíhového zrychlení  $\gamma$ . Tíhová anomálie je definována vztahem

$$\Delta g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') = \mathbf{g}(\mathbf{r}) - \gamma(\mathbf{r}''), \quad (3.44)$$

je tedy vztažena ke dvěma bodům určených průvodiči  $\mathbf{r}, \mathbf{r}''$ , které leží na různých plochách. Pokud je skutečné tíhové zrychlení  $\mathbf{g}(\mathbf{r})$  definováno na topografii, normální tíhové zrychlení  $\gamma(\mathbf{r}'')$  je definováno na Moloděnského telluroidu. Body určené průvodiči  $\mathbf{r}, \mathbf{r}''$  leží na normále k referenčnímu elipsoidu. Navíc pro tyto body platí vztah

$$W(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}''), \quad (3.45)$$

kde  $W(\mathbf{r})$  je skutečný tíhový potenciál na topografii,  $U(\mathbf{r}'')$  je normální tíhový potenciál na Moloděnského telluroidu. Velikost normálního tíhového zrychlení  $\gamma$  v bodě na Moloděnského telluroidu je možné popsat opět pomocí Taylorova rozvoje funkce  $\gamma$  z bodu na referenčním elipsoidu určeném průvodičem  $\mathbf{r}'$ . Získáme obdobnou rovnici jako v případě tíhové poruchy (3.43), kde však je elipsoidální výška  $h$  nahrazena normální výškou  $H^N$  (viz rov. 2.22):

$$\gamma(\mathbf{r}'') \doteq \gamma(\mathbf{r}') + \left. \frac{\partial \gamma}{\partial n} \right|_{r'} H^N + \left. \frac{\partial^2 \gamma}{\partial n^2} \right|_{r'} \frac{(H^N)^2}{2}. \quad (3.46)$$

Normální výšku bodu je možné určit z nivelačních měření. Vztah v rovnici (3.45) platí nejen pro topografii a Moloděnského telluroid, ale např. také pro geoid a elipsoid - viz obr. 3-2. Velikost tíhové poruchy a tíhové anomálie dosahuje hodnot řádově  $10^2$  mGal.

Tížnicovou odchylku  $\Theta$ , definovanou v rovnici (3.41), je velmi těžké určit. Problémem je hladinová plocha normálního tíhového pole, která prochází daným bodem. Tuto plochu téměř není možné popsat, proto k ní nelze určit normálu. Z tohoto důvodu byly zavedeny jinak definované tížnicové odchylky (např. Helmertova, Moloděnského), které poměrně přesně nahrazují původní tížnicovou odchylku  $\Theta$  a kde je normála k dané hladinové ploše normálního tíhového pole nahrazena normálou k referenčnímu elipsoidu. Normálu k referenčnímu elipsoidu je možné určit v libovolném bodě.

*Helmertova tížnicová odchylka*  $\Theta^H$  je definována jako úhel mezi tížnicí  $\mathbf{t}(\mathbf{r}_{geoid})$  v bodě na geoidu a normálou  $\mathbf{n}(\mathbf{r}_{el})$  v bodě na elipsoidu:

$$\Theta^H(\mathbf{r}_{geoid}, \mathbf{r}_{el}) = \sphericalangle(\mathbf{t}(\mathbf{r}_{geoid}), \mathbf{n}(\mathbf{r}_{el})), \quad (3.47)$$

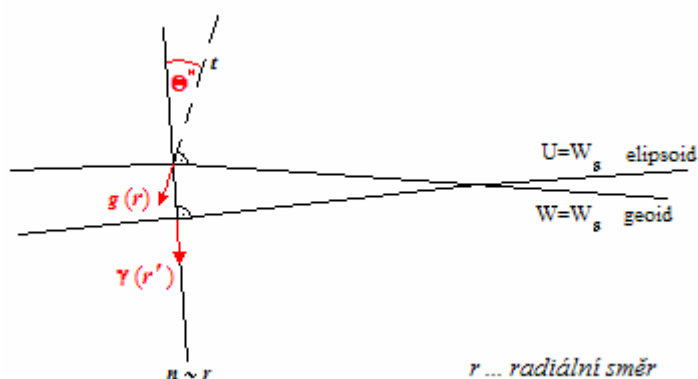
kde bod ležící na geoidu je určen průvodičem  $\mathbf{r}_{geoid}$ , bod na elipsoidu je určen průvodičem  $\mathbf{r}_{el}$ . Body leží ve stejném radiálním směru (viz obr. 3-2).

*Moloděnského tížnicová odchylka*  $\Theta^M$  popisuje úhel mezi tížnicí  $\mathbf{t}(\mathbf{r}_{top})$  v bodě na topografii a normálou  $\mathbf{n}(\mathbf{r}_{el})$  v bodě na elipsoidu:

$$\Theta^M(\mathbf{r}_{top}, \mathbf{r}_{el}) = \sphericalangle(\mathbf{t}(\mathbf{r}_{top}), \mathbf{n}(\mathbf{r}_{el})). \quad (3.48)$$

Tížnicové odchylky dosahují řádově hodnot až  $70''$  (těchto hodnot dosahují ve vysokých horách).

Výše popsané poruchové a anomální veličiny (především jejich skalární hodnotu) je možné měřit, nebo je lze určit z měřených tíhových dat.



Obrázek 3-2: Skutečné a normální tíhové pole

Výše uvedené veličiny popisují poruchové tíhové pole Země. Jejich přehled je uveden v tab. 3.1.

Tabulka 3.1: Porovnání skutečného a normálního tíhového pole

	<b>SKUTEČNÉ tíhové pole</b>	<b>NORMÁLNÍ tíhové pole</b>	<b>PORUCHOVÉ tíhové pole</b>
Tíhový potenciál	$W$	$U$	$T$
Tíhové zrychlení	$-\text{grad } W(\mathbf{r}) = \mathbf{g}(\mathbf{r})$	$-\text{grad } U(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r})$	$-\text{grad } T(\mathbf{r}) = \delta \mathbf{g}(\mathbf{r})$
"směr" tíhového zrychlení	tížnice $t$	normála $\mathbf{n}^{1)}$	$\Theta(\mathbf{r}) = \angle(\mathbf{n}, t)(\mathbf{r})$

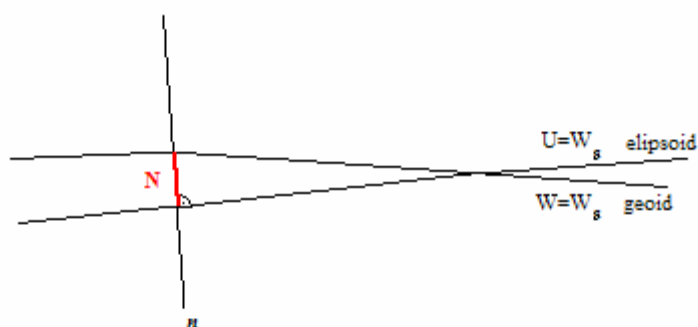
<sup>1)</sup> Normála  $\mathbf{n}$  k referenčnímu elipsoidu určuje směr normálního tíhového zrychlení pouze v bodech na povrchu referenčního elipsoidu. V bodech vně referenčního elipsoidu je směr normálního tíhového zrychlení určen normálou k hladinové ploše normálního tíhového pole procházející tímto bodem.

Pomocné (anomální) veličiny, které aproximují přesné poruchové hodnoty, jsou uvedeny v tab. 3.2.

Tabulka 3.2: Poruchové a anomální veličiny

Poruchová veličina	Anomální veličina
Tíhová porucha $\delta g(\mathbf{r})$	Tíhová anomálie $\Delta g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$
Poruchová tížnicová odchylka	Anomální tížnicová odchylka
$\Theta(\mathbf{r}_{geoid}) \rightarrow$	– Helmertova: $\Theta_H(\mathbf{r}_{geoid}, \mathbf{r}_{el}) = \sphericalangle(\mathbf{t}(\mathbf{r}_{geoid}), \mathbf{n}(\mathbf{r}_{el}))$
$\Theta(\mathbf{r}_{top}) \rightarrow$	– Moloděnského: $\Theta_M(\mathbf{r}_{top}, \mathbf{r}_{el}) = \sphericalangle(\mathbf{t}(\mathbf{r}_{top}), \mathbf{n}(\mathbf{r}_{el}))$

Základní hladinovou plochou skutečného tíhového pole je geoid, normálního tíhového pole referenční elipsoid. Vertikální odlehlost těchto ploch popisují *geoidální výšky*  $N$ . Geoidální výšky vyjadřují převýšení geoidu nad referenčním elipsoidem, které je měřeno podél normály k elipsoidu – viz obr. 3-3.

Obrázek 3-3: Geoidální výška  $N$ 

Geoid a referenční elipsoid jsou plochy významné při definici anomálních veličin, protože skutečný tíhový potenciál  $W$  na geoidu je roven normálnímu tíhovému potenciálu  $U$  na referenčním elipsoidu. Obdobně lze pro topografii definovat plochu, pro kterou by platilo, že normální tíhový potenciál  $U$  na této ploše je roven skutečnému tíhovému potenciálu  $W$  na topografii. Takto definovaná plocha se nazývá Moloděnského telluroid. Vertikální odlehlost povrchu topografie a Moloděnského telluroidu popisuje *výšková anomálie*  $\zeta$ . Výšková anomálie je také uvažována podél normály k referenčnímu elipsoidu.



## 4 Jaká tíhová data je možné měřit

Tíhový potenciál  $W$  není možné přímo měřit. Je ale možné měřit jeho směrové derivace – gradient tíhového potenciálu  $\nabla W$  (vektor intenzity tíhového pole) a gradiometrický (Marrusioho) tenzor<sup>7</sup>  $\nabla \times \nabla W$ . Z těchto měřených dat je možné tíhový potenciál  $W$  spočítat.

Všechny úlohy na výpočet tíhového potenciálu  $W$  vyžadují, aby vstupní data byla spojitá a globální. Měřit však lze pouze diskrétní data, která jsou navíc mnohdy pouze lokální. Globální charakter mají prakticky pouze družicová data. Některé typy výpočtů ale umí pracovat i s lokálními daty. Výsledek je pak ale pouze přibližný. Velmi často se data různého typu pro odvození tíhového potenciálu kombinují.

### 4.1 Gravimetrie

Gravimetrie se zabývá měřením gradientu tíhového potenciálu  $\nabla W$ . V některých případech (letecká a družicová gravimetrie) je možné měřit všechny tři směrové derivace. V případě pozemní gravimetrie se ale měří pouze derivace přibližně v radiálním směru  $\frac{\partial}{\partial r} W$ , tj. vertikální složka vektoru tíhového zrychlení  $\mathbf{g}$ .

Podle místa měření lze gravimetrii obecně rozdělit na pozemní, leteckou a družicovou. Gravimetrické měření ale může probíhat i na lodích (námořní gravimetrie), v ponorkách apod. Tabulka 4.1 uvádí přehled výhod a nevýhod jednotlivých typů gravimetrie.

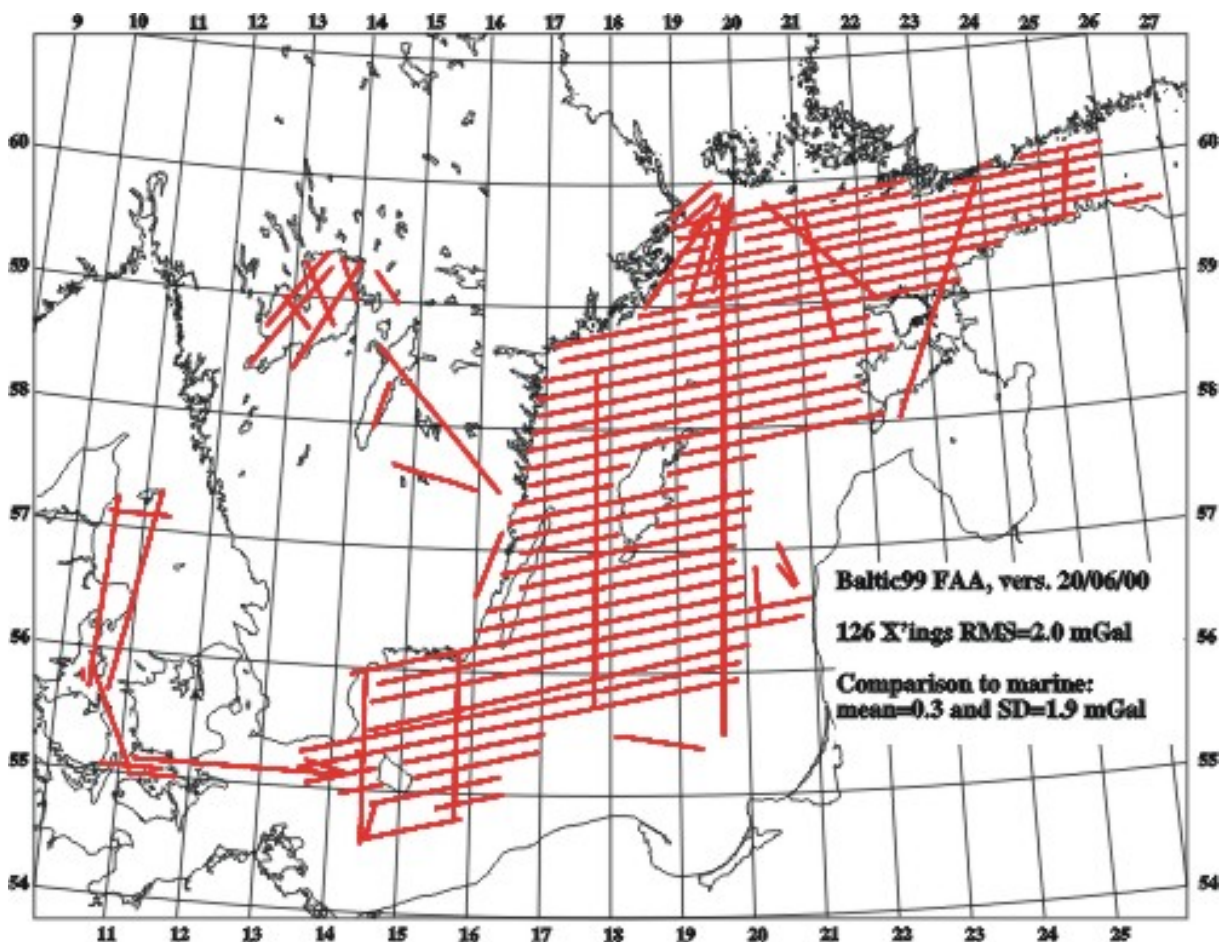
*Pozemní gravimetrie* je velmi přesná, absolutní gravimetrií je hodnota  $\frac{\partial}{\partial r} W$  určena až s přesností na  $\mu\text{Gal}$ . Vzhledem k definici jednotky 1 Gal ( $1\text{Gal} = 10^{-2}\text{ms}^{-2}$ ) je tíhové zrychlení určeno s přesností řádově  $980\,000 \pm 0,001\text{mGal}$ . Přesnost relativní gravimetrie je ale mnohem nižší. Hodnota  $\frac{\partial}{\partial r} W$  je určena s přesností řádově 0,1 mGal. Velkou

---

<sup>7</sup> Marussi, Antonio (1908-1984) – italský matematik a geodet

nevýhodou pozemní gravimetrie je skutečnost, že měřit je možné pouze v přístupném terénu, měření jsou časově náročná a data mají lokální charakter.

Tyto problémy částečně odstraňuje *letecká gravimetrie*. Měření probíhá v letadle, které je od povrchu Země vzdáleno stovky metrů. Měřená oblast je pokryta trajektoriemi letu, podél nichž se provádí měření. Obr. 4-1 znázorňuje plán letu při mapování oblasti Baltského moře. Cílem letecké gravimetrie je rekonstrukce celého vektoru tíhového zrychlení  $\mathbf{g}$ . Často však lze z dat získat pouze jeho velikost  $|\mathbf{g}|$ , resp. jeho vertikální složku, která je dominantní složkou vektoru  $\mathbf{g}$ . Leteckou gravimetrií je možné získat poměrně rychle tíhová data i z nepřístupných oblastí. Ačkoli lze takto ve stejném čase získat více dat než z pozemních měření, přesto i tato data stále nemají globální charakter. Navíc je měření zatíženo šumem (hlavním zdrojem šumu je nerovnoměrný pohyb letadla), s nímž se při následném zpracování odstraní i část signálu. Kvůli filtraci při odstraňování šumu jsou data získaná leteckou gravimetrií frekvenčně omezená. Jejich přesnost je v řádu mGal.



Obrázek 4-1: Letecká gravimetrie – příklad plánu letu (zdroj: <http://research.kms.dk>)

Téměř globální pokrytí Země (mimo polární oblasti) měřenými daty zajišťuje *družicová gravimetrie*. Družice létají ve výškách 200 - 500 km nad zemským povrchem. Na začátku měření jsou vypuštěny ve výšce přibližně 500 km. Během letu se postupně přibližují k Zemi. Ve chvíli, kdy jejich výška klesne pod určitou hodnotu (přibližně 200 km), se již jejich data nezpracovávají. Ve výšce uvedeném výškovém pásmu je gravitační signál mnohem slabší<sup>8</sup> než při pozemní a letecké gravimetrii, navíc obsahuje také měřický šum. Proto je možné úspěšně rekonstruovat pouze nízkofrekvenční složku tíhových dat, ze které lze získat pouze vyhlazené tíhové pole.

Výsledkem družicových gravimetrickým měření je globální model tíhového pole, který obsahuje koeficienty sférického harmonického rozvoje gravitačního potenciálu do určitého stupně  $n$  a řádu  $m$  (Stokesovy koeficienty  $A_{n,m}, B_{n,m}$ ) – viz rov. (3.19). Globální model obsahuje pouze nízkofrekvenční (dlouhovlnnou) složku tíhového potenciálu. Je možné jej zpřesnit doplněním o lokální model, který obsahuje vysokofrekvenční (krátkovlnnou) složku tíhového potenciálu. Vysokofrekvenční složka zahrnuje členy sférického harmonického rozvoje gravitačního potenciálu s koeficienty stupně  $n+1$  a vyššího. Lze ji získat analýzou lokálních dat letecké nebo pozemní gravimetrie. Způsob kombinace těchto tří datových složek je samostatným problémem v teorii tíhového pole, který není v této práci řešen.

---

<sup>8</sup> Útlumový faktor signálu je  $\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}$ , kde  $R$  je poloměr střední koule nahrazující geoid a  $r$  je velikost průvodiče vnějšího bodu, ve kterém se měří tíhová data.

Tabulka 4.1: Výhody a nevýhody různých typů gravimetrických měření

	<b>POZEMNÍ gravimetrie</b>	<b>LETECKÁ gravimetrie</b>	<b>DRUŽICOVÁ gravimetrie</b>
Přesnost měřených dat (data s malým procentem šumu)	+ vysoká přesnost – systematické chyby měření	– vysokofrekvenční šum	– + vyšší šum, ale vzhledem k určení globální složky dobrá přesnost
Pokrytí zemského povrchu měřeními daty	– jednotlivé body na povrchu Země	– + lokální rovnoměrné pokrytí	+ globální pokrytí celé Země
Možnost měření v nepřístupných oblastech	– v nepřístupných oblastech nelze měřit	+ lze měřit i nad nepřístupnými oblastmi (hory, močály aj.)	+ měření pokrývá povrch celé Země (kromě polárních oblastí)
Citlivost měření	+ nejvyšší možná citlivost	– + dobrá citlivost, ale slabší než na povrchu (vysokofrekvenční šum)	– určení pouze globální složky tíhového pole

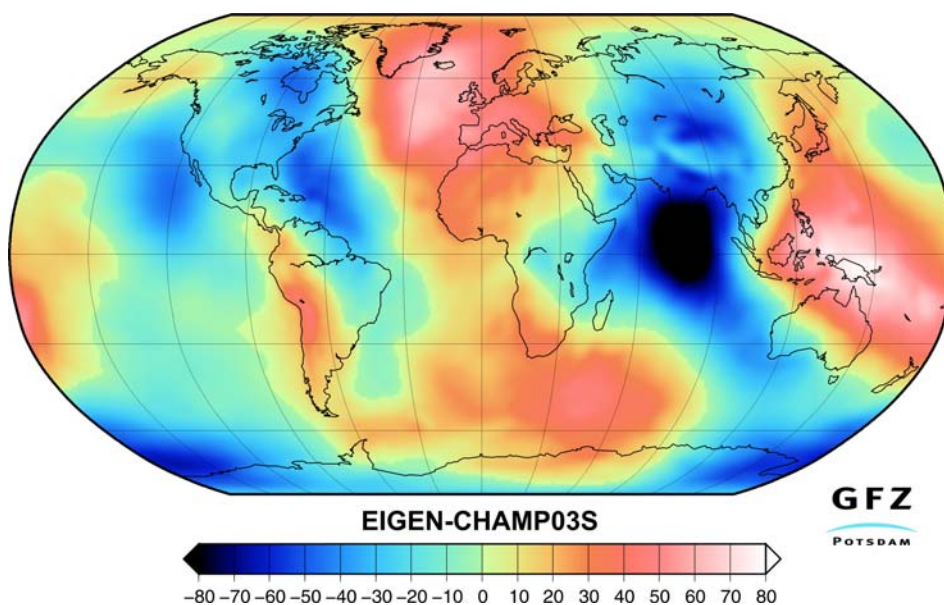
#### 4.1.1 Družicová gravimetrie

V dnešní době zajišťují sběr tíhových dat pro určování tíhového pole Země především dvě družicové mise – CHAMP (vypuštěna v červenci 2000) a GRACE (vypuštěna v březnu 2002).

CHAMP (CHALLENGING Minisatellite Payload<sup>9</sup>) je německá družicová mise realizovaná GFZ (GeoForschungsZentrum), což je německé národní výzkumné centrum pro geovědy v Postupimi. Družice CHAMP je vybavena vysoce přesnými přístroji (akcelerometr, GPS přijímač, magnetometr, laserový zpětný odražeč apod.). Díky své téměř polární dráze, malé výšce nad povrchem Země a dlouhé životnosti (přes 2080 dní) družice již naměřila data, která umožnila odvození velmi přesného modelu tíhového a magnetického pole ve formě koeficientů sférické harmonické řady. Získaná data umožňují popis prostorových i časových variací obou polí. Obr. 4-2 a 4-3 zobrazují dva vybrané

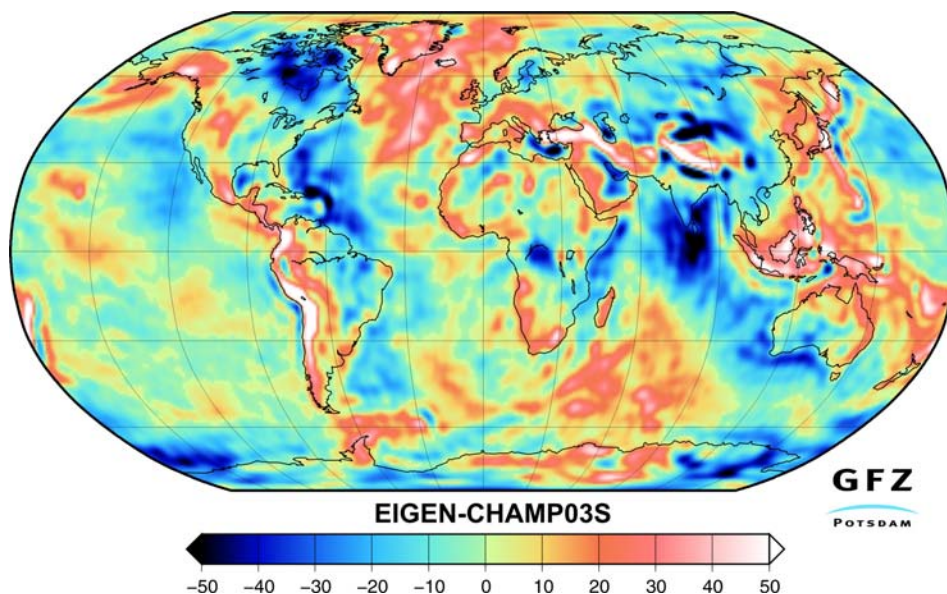
<sup>9</sup> Zdroj: [http://www.gfz-potsdam.de/pb1/op/champ/index\\_CHAMP.html](http://www.gfz-potsdam.de/pb1/op/champ/index_CHAMP.html)

parametry tíhového pole Země – geoidální výšky a tíhové anomálie, vypočítané z modelu tíhového pole Země EIGEN-CHAMP03S, který byl vytvořen na základě dat získaných v období říjen 2000 – červen 2003. Tento model obsahuje plně normované Stokesovy koeficienty gravitačního potenciálu do řádu a stupně  $n=120$ . Při výpočtech byl použit referenční elipsoid s hlavní poloosou  $a=6\,378\,136,46$  m a převrácenou hodnotou zploštění  $f^{-1}=298,257\,65$ . Model EIGEN-CHAMP03S byl vytvořen s přesností 5 cm (geoidální výšky) a 0,5 mGal (tíhové anomálie) vztaženou k vlnovým délkám 800 km.



Obrázek 4-2: EIGEN-CHAMP03S – geoidální výšky (v metrech)

(zdroj: [http://www.gfz-potsdam.de/pb1/op/champ/results/index\\_RESULTS.html](http://www.gfz-potsdam.de/pb1/op/champ/results/index_RESULTS.html))



Obrázek 4-3: EIGEN-CHAMP03S - tíhové anomálie (v mGal)

(zdroj: [http://www.gfz-potsdam.de/pb1/op/champ/results/index\\_RESULTS.html](http://www.gfz-potsdam.de/pb1/op/champ/results/index_RESULTS.html))

GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment<sup>10</sup>) je společný projekt NASA (National Aeronautics and Space Administration - Národní výbor pro výzkum vesmíru a meziplanetární lety) a DLR (Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt - německé kosmické centrum). Cílem této mise je velmi přesné určení globálního modelu tíhového pole Země. Kromě středního tíhového pole Země by měly být výsledkem také časové variace tohoto pole. Projekt GRACE navazuje na výše zmíněnou misi CHAMP. Zvýšení přesnosti bylo docíleno použitím dvou satelitů, které se pohybují za sebou po téměř stejné orbitální dráze. Změny jejich vzájemné vzdálenosti jsou měřeny pomocí velmi přesného radarového dálkoměru. Jedním z výsledných modelů tíhového pole Země vytvořených z družicových dat mise GRACE je model EIGEN-GRACE02S, který obsahuje plně normované Stokesovy koeficienty gravitačního potenciálu do řádu a stupně  $n=150$ . Přesnost určení geoidu (geoidálních výšek) v tomto modelu je 1 mm pro vlnové délky 2000 km.

## 4.2 Gradiometrie

Gradiometrie lze stejně jako gravimetrii rozdělit na pozemní, leteckou a nově i družicovou (plánovaná družice GOCE). Prakticky je zatím realizováno pouze pozemní měření, které je ale vzhledem k velmi citlivým gradiometrickým přístrojům značně problematické. Letecká a družicová gradiometrie je stále ve stádiu výzkumu. V případě gradiometrie je měřenou veličinou gradiometrický tenzor (viz Dodatek A, rov. A.15), resp. jeho složky

$$\nabla \times \nabla W(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(\mathbf{r}) & \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} W(\mathbf{r}) & \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} W(\mathbf{r}) \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} W(\mathbf{r}) & \frac{\partial^2}{\partial y^2} W(\mathbf{r}) & \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} W(\mathbf{r}) \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} W(\mathbf{r}) & \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} W(\mathbf{r}) & \frac{\partial^2}{\partial z^2} W(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

který je symetrický. V tomto tenzoru je šest různých prvků. Pro body, které jsou vně Země a nejsou pevně spojeny se zemským povrchem, splňují prvky na diagonále Laplaceovu diferenciální rovnici. Proto v tomto případě obsahuje gradiometrický tenzor  $\nabla \times \nabla W$

<sup>10</sup> Zdroj: [http://www.gfz-potsdam.de/pb1/op/grace/index\\_GRACE.html](http://www.gfz-potsdam.de/pb1/op/grace/index_GRACE.html)

pouze pět nezávislých prvků. Ze složek gradiometrického tenzoru je také možné určit Stokesovy koeficienty  $A_{n,m}, B_{n,m}$  (viz kap. 3.1.2).

Gradiometrickou jednotkou je Eotvos<sup>11</sup> ( $1E = 10^{-9} s^{-2}$ ). Největší hodnoty nabývají složky tenzoru ve vertikálním směru (řádově až 3 000 E – nárůst výšky o 1 m způsobí pokles tíhového zrychlení o 0,3 mGal). Horizontální složky jsou mnohem menší. Na plochém homogenním povrchu se střední hodnotou zeměpisné šířky dosahují hodnot přibližně 8 E (směrem od pólu k rovníku vzroste na úseku 1 km hodnota tíhového potenciálu o 0,8 mGal). Je to způsobeno zploštěním Země na pólech a odstředivou silou rotace Země. Výhodou gradiometrie je vyšší citlivost, které umožní měřit při družicových misích nejen nízkofrekvenční složku tíhových dat, ale také část vysokofrekvenční složky. Problémem je pak oddělení signálu a měřického šumu.

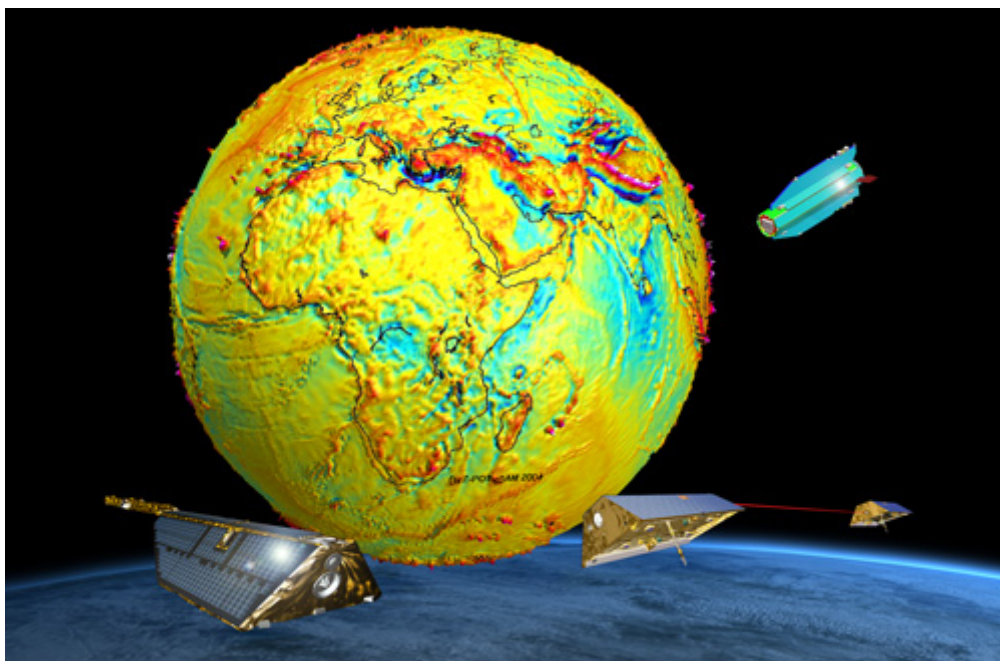
#### 4.2.1 Družicová gradiometrie – GOCE

GOCE (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer<sup>12</sup>) bude družice Evropské kosmické agentury ESA (European Space Agency). Tato družice je určena k měření gradiometrických dat tíhového pole Země. Cílem projektu je stanovení anomálií tíhového pole s přesností 1 mGal na 100 km a geoidu s přesností 1-2 cm na 100 km. Z měřených gradiometrických dat by mělo být možné určit Stokesovy koeficienty řádu aspoň  $n = 200$ . Družice by se měla pohybovat po téměř polární dráze (sklon dráhy by měl být  $96.5^\circ$ ) v průměrné výšce 250 km. Vypuštěna by měla být v roce 2006. Obr. 4-4 znázorňuje všechny výše zmíněné družice – CHAMP, GRACE a GOCE.

---

<sup>11</sup> Vásárosnaményi Bárá Eötvös Loránd, známý jako Loránd Eötvös (1848-1919) – maďarský fyzik

<sup>12</sup> Zdroj: [http://www.esa.int/esaLP/ESAYEK1VMOC\\_LPgoce\\_0.html](http://www.esa.int/esaLP/ESAYEK1VMOC_LPgoce_0.html)



Obrázek 4-4: Družice (zleva) CHAMP, GRACE, GOCE

### 4.3 Družicová altimetrie

Z družicových gravimetrických či gradiometrických měření lze úspěšně určit pouze nízkofrekvenční složku tíhového pole Země. Lokální zpřesnění tíhového pole (určení vysokofrekvenční složky) se provádí z pozemních, popř. leteckých tíhových měření. Tento způsob měření lze použít především na zemském povrchu, nebo při pobřeží. Na moři je možné získat další data např. pomocí námořní gravimetrie, která ale není příliš rozšířená. Další možností, jak získat popis tíhového pole v oblastech oceánů, je družicová altimetrie.

*Družicová altimetrie* určuje přímo geometrii hladiny oceánů. Data jsou získávána z družic, které pomocí GPS měří svoji polohu (v geodetických souřadnicích – určuje elipsoidální výšku  $h$ ) a radarovým altimetrem měří vzdálenost  $a$  od hladiny oceánů. Pokud by na oceány působila pouze zemská tíže, geometrie hladiny oceánů by byla stejná jako geometrie geoidu a rozdíl měřených vzdáleností  $h - a$  by přímo určoval geoidální výšku  $N$ , tj. převýšení geoidu nad elipsoidem. Ve skutečnosti ale na oceány působí i jiné vlivy než jen zemská tíže (slapy, mořské proudy, vlastnosti mořské vody – např. slanost, apod.). Tyto vlivy způsobí, že mezi hladinou oceánů a geoidem existuje převýšení nazývané



topografie mořské hladiny (SST – Sea Surface Topography), dosahující hodnot až 2 metry. Toto převýšení je ale poměrně obtížně určitelné.

Družicovou altimetrií lze tedy získat přibližný popis geometrie geoidu, který je jednou z hladinových ploch tíhového pole Země. Z těchto dat je dále možné určit tíhové zrychlení, které lze využít k určení reziduální složky tíhového pole Země nad oceány. K výpočtu se využívá metoda inverzní Stokesovy úlohy, tj. z geoidální výšky  $N$  se určuje tíhová anomálie  $\Delta g$ , ze které se počítá hodnota tíhového zrychlení  $g$ .

## 5 Matematické metody řešení

Popis tíhového pole Země a určení jedné jeho konkrétní hladinové plochy – geoidu, patří mezi základní úkoly současné geodézie. Určovaný tíhový potenciál  $W$  je možné rozdělit vzhledem k dostupným datům na globální (nízkofrekvenční) a reziduální (vysokofrekvenční) složku (vlastnosti měřených dat – viz tab. 4.1). Globální složku tíhového potenciálu  $W$  je možné popsat pomocí sférické harmonické řady (viz kap. 3.1.2). Reziduální složka tíhového potenciálu  $W$  se řeší především pomocí okrajových úloh teorie potenciálu. Okrajové hodnoty jsou odvozeny z lokálních tíhových dat, pozemních či leteckých.

### 5.1 Dirichletova úloha

Základní okrajovou úlohou v teorii potenciálu je Dirichletova úloha. V této úloze je určována hodnota funkce, která splňuje Laplaceovu diferenciální rovnici a Dirichletovu okrajovou podmínku popisující hodnotu této funkce na hranici jednoduše souvislé hladké uzavřené oblasti (Lipschitzova hranice). Vnější Dirichletova úloha pro poruchový tíhový potenciál  $T$  s hranicí tvořenou geoidem je určena vztahy (Martinec 1998):

$$\begin{aligned}\nabla^2 T(\mathbf{r}) &= 0, \quad \text{pro } \mathbf{r} > \mathbf{r}_B, \\ T(\mathbf{r}) &= T_B, \quad \text{pro } \mathbf{r} = \mathbf{r}_B, \\ \lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} T(\mathbf{r}) &= 0,\end{aligned}\tag{5.1}$$

kde  $\mathbf{r}_B$  je průvodič bodů ležících na geoidu. Aby platily rovnice (5.1), musí být poruchový tíhový potenciál  $T$  harmonickou funkcí vně geoidu. Tato podmínka ale není obecně splněna, neboť vně geoidu se nachází část zemských hmot a také atmosféra. Proto je nutné opravit vstupní tíhová data o tyto vlivy, aby byla úloha korektní. Redukce tíhových dat o vliv vnějších topografických a atmosférických hmot je značně komplikovaná a v této práci není dále diskutována.

Takto zadaná úloha je úloha s volnou hranicí, neboť průběh geoidu není předem znám. Proto je nutné geoid nahradit pomocnou plochou, např. náhradní koulí nebo

referenčním elipsoidem. Při použití referenčního elipsoidu lze získat přesnější řešení, neboť referenční elipsoid nahrazuje geoid lépe než koule. Při aproximaci koulí se ale zjednoduší forma řešení. Navíc pro lokální úlohy jsou rozdíly mezi náhradní koulí a elipsoidem velmi malé. Z těchto důvodů bude v dalším textu využita sférická aproximace geoidu náhradní koulí o poloměru  $R$ . Vnější Dirichletova úloha v této sférické aproximaci bude tedy zadána vztahy

$$\begin{aligned}\nabla^2 T(\mathbf{r}) &= 0, \quad \text{pro } |\mathbf{r}| = r > R, \\ T(\mathbf{r}) &= T_B, \quad \text{pro } |\mathbf{r}| = r = R, \\ \lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} T(\mathbf{r}) &= 0,\end{aligned}\tag{5.2}$$

kde  $T_B$  jsou hodnoty poruchového tíhového potenciálu na náhradní kouli. Takto zadaná vnější Dirichletova úloha je korektní (viz Dodatek B).

## 5.2 Použitelné okrajové podmínky pro poruchový tíhový potenciál

Dirichletova úloha pro poruchový tíhový potenciál  $T$  je určena okrajovou podmínkou popsanou v rovnici (5.2). Pro řešení této úlohy je tedy nutné znát hodnoty poruchového tíhového potenciálu  $T$  na hranici oblasti (zde náhradní koule). Poruchový tíhový potenciál ale není možné přímo měřit. Měřenými hodnotami jsou směrové derivace skutečného tíhového potenciálu  $W$  (viz kap. 4). Proto je nutné najít okrajovou podmínku obsahující veličiny, které lze určit měřením. Při určování okrajové podmínky pro poruchový tíhový potenciál  $T$  lze vycházet ze vztahu pro tíhovou anomálii  $\Delta g$  a v současnosti stále více i ze vztahu pro tíhovou poruchu  $\delta g$  (viz kap. 3.3).

V následujících podkapitolách je velmi důležité rozlišit, ke kterým bodům (na které ploše) jsou jednotlivé veličiny a jejich derivace vztaženy. V rovnicích se vyskytuje tíhový potenciál  $W$ , tíhové zrychlení  $g$ , normální tíhový potenciál  $U$  a normální tíhové zrychlení  $\gamma$ . Všechny uvedené veličiny jsou ve skutečnosti funkcí nejen polohového vektoru  $\mathbf{r}$ , ale také času. V této práci ale časové variace tíhového pole nejsou uvažovány. Veličiny jsou tedy závislé pouze na polohovém vektoru  $\mathbf{r}$ , který je popsán třemi elementy. Při použití geocentrického zemského souřadnicového systému (vzhledem k tvaru Země je výhodné

použít sférické souřadnice) jsou těmito elementy velikost vektoru  $r = |\mathbf{r}|$ , pólová vzdálenost  $\theta$  a sférická délka  $\lambda$  (viz kap. 2.2.3). Skutečné tíhové pole je tedy popsáno skalárně tíhovým potenciálem  $W(r, \theta, \lambda)$  a vektorově tíhovým zrychlením  $\mathbf{g}(r, \theta, \lambda)$ , pro které platí vztah

$$\mathbf{g}(r, \theta, \lambda) = -\nabla W(r, \theta, \lambda). \quad (5.3)$$

Vzhledem k vlastnostem skutečného tíhového pole je dominantní složkou gradientu tíhového potenciálu složka ve směru lokální tížnice  $t$ . Ostatní složky jsou velmi malé, takže při měření často zaniknou v měřickém šumu. Pro skutečné tíhové pole tedy platí vztah

$$\mathbf{g} \doteq -\frac{\partial W}{\partial t}. \quad (5.4)$$

Směr lokální tížnice  $t$  je možné aproximovat radiálním směrem  $r$ . Pomocí astronomicky určené tížnicové odchylky  $\theta$  (viz kap. 3.3) lze směr lokální tížnice nahradit normálou  $n$  k referenčnímu elipsoidu. Zavedením elipsoidálních oprav lze následně přejít od normály k radiálnímu směru. Potom přechází vztah (5.4) do tvaru

$$\mathbf{g}(r, \theta, \lambda) \doteq -\frac{\partial W(r, \theta, \lambda)}{\partial r}. \quad (5.5)$$

V tomto zápise je tíhové zrychlení  $\mathbf{g}$  popsáno pouze radiální složkou gradientu ve sférických souřadnicích. Není to tedy vektor, ale pouze skalární veličina. Zápis

$$g(r_p, \theta_p, \lambda_p) = -\left. \frac{\partial W(r, \theta, \lambda)}{\partial r} \right|_{r=r_p, \theta=\theta_p, \lambda=\lambda_p}, \quad (5.6)$$

označuje hodnotu tíhového zrychlení  $\mathbf{g}(r, \theta, \lambda)$  v bodě  $P$  o sférických souřadnicích  $(r_p, \theta_p, \lambda_p)$ . Tato hodnota je rovna záporné radiální derivaci tíhového potenciálu  $W(r, \theta, \lambda)$  určené opět v bodě  $P$ . Rovnice (5.6) bude v dalším textu pro zpřehlednění zkráceně zapsána ve tvaru:

$$g(r_p, \theta_p, \lambda_p) = -\left. \frac{\partial W(r, \theta, \lambda)}{\partial r} \right|_P. \quad (5.7)$$

Pro normální tíhové pole platí obdobné vztahy. Pro normální tíhový potenciál  $U(r, \theta)$  a normální tíhové zrychlení  $\boldsymbol{\gamma}(r, \theta)$  platí rovnice

$$\boldsymbol{\gamma}(r, \theta) = -\nabla U(r, \theta). \quad (5.8)$$

Dominantní složkou gradientu je zde složka ve směru normály  $n$  k referenčnímu elipsoidu. Tuto skutečnost lze obdobně jako v případě skutečného tíhového pole popsat vztahem

$$\gamma \doteq -\frac{\partial U}{\partial n}. \quad (5.9)$$

Také směr normály lze aproximovat radiálním směrem  $r$ . Po zavedení elipsoidálních korekcí lze tedy vztah (5.9) přepsat do tvaru

$$\gamma(r, \theta) \doteq -\frac{\partial U(r, \theta)}{\partial r}. \quad (5.10)$$

Vztah mezi radiální derivací normálního tíhového potenciálu  $U(r, \theta)$  v bodě  $P$  a hodnotou normálního tíhového zrychlení  $\gamma(r, \theta)$  v tomtéž bodě je popsán rovnicí

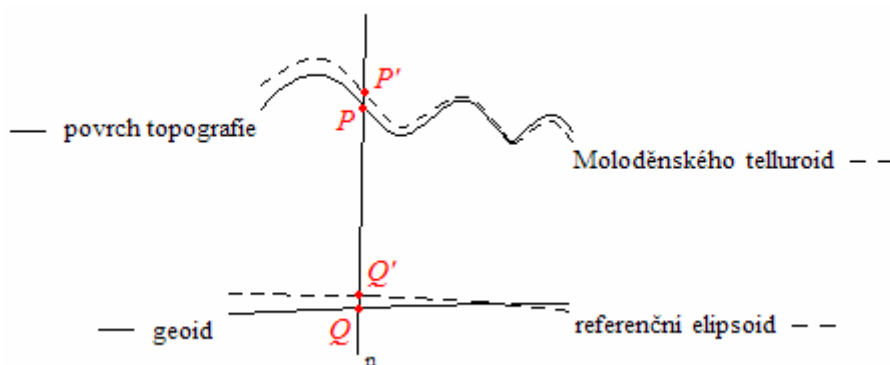
$$\gamma(r_p, \theta_p) \doteq -\frac{\partial U(r, \theta)}{\partial r} \Big|_{r=r_p, \theta=\theta_p}, \quad (5.11)$$

kteřá bude dále pro zpřehlednění textu zkráceně zapsána ve tvaru:

$$\gamma(r_p, \theta_p) \doteq -\frac{\partial U(r, \theta)}{\partial r} \Big|_P. \quad (5.12)$$

Pro lepší orientaci v následujícím textu bude označení bodů pevně spojeno s konkrétní plochou (viz obr. 5-1):

- $P$  ... bod ležící na povrchu topografie
- $P'$  ... bod ležící na Moloděnského telluroidu
- $Q$  ... bod ležící na geoidu
- $Q'$  ... bod ležící na referenčním elipsoidu



Obrázek 5-1: Umístění bodů  $P, P', Q, Q'$  na konkrétní plochy

### 5.2.1 Určení okrajové podmínky pomocí tíhové poruchy

Vycházíme ze vztahu pro tíhovou poruchu v libovolném bodě  $P$  na ploše, kde lze měřit hodnoty tíhového zrychlení  $\mathbf{g}$ , tedy na topografii:

$$\delta \mathbf{g}(r_p, \theta_p, \lambda_p) = \mathbf{g}(r_p, \theta_p, \lambda_p) - \boldsymbol{\gamma}(r_p, \theta_p). \quad (5.13)$$

Vektor zrychlení tíhového pole Země v bodě  $P$   $\mathbf{g}(r_p, \theta_p, \lambda_p)$  lze vyjádřit jako gradient tíhového potenciálu  $W$  v bodě  $P$ , tedy

$$\mathbf{g}(r_p, \theta_p, \lambda_p) = -\nabla_P W(r, \theta, \lambda), \quad (5.14)$$

kde

$$-\nabla_P W(r, \theta, \lambda) = \left[ -\frac{\partial W(r, \theta, \lambda)}{\partial r} \Big|_P, -\frac{1}{r} \frac{\partial W(r, \theta, \lambda)}{\partial \theta} \Big|_P, -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial W(r, \theta, \lambda)}{\partial \lambda} \Big|_P \right]^T. \quad (5.15)$$

V předchozím textu byl za využití sférické aproximace  $t \sim n \sim r$  odvozen přibližný vztah pro hodnotu tíhového zrychlení v bodě  $P$

$$\mathbf{g}(r_p, \theta_p, \lambda_p) \doteq -\frac{\partial W(r, \theta, \lambda)}{\partial r} \Big|_P. \quad (5.16)$$

Také normální tíhové zrychlení  $\boldsymbol{\gamma}$  lze vyjádřit jako gradient normálního tíhového potenciálu  $U$ . Využitím sférické aproximace  $n \sim r$  byl výše odvozen vztah

$$\boldsymbol{\gamma}(r_p, \theta_p) \doteq -\frac{\partial U(r, \theta)}{\partial r} \Big|_P. \quad (5.17)$$

Při uvedených aproximacích se pracuje místo vektorů  $\mathbf{g}$  a  $\boldsymbol{\gamma}$  pouze s jejich skalárními hodnotami  $g$  a  $\gamma$ . Proto také tíhová porucha ve výsledku není vektor, ale skalární hodnota.

Rovnice (5.13) tedy přechází do tvaru

$$\delta g(r_p, \theta_p, \lambda_p) = g(r_p, \theta_p, \lambda_p) - \gamma(r_p, \theta_p). \quad (5.18)$$

Po dosazení výše uvedených aproximací skutečného a normálního tíhového zrychlení získáme vztah

$$\begin{aligned} \delta g(r_p, \theta_p, \lambda_p) = g(r_p, \theta_p, \lambda_p) - \gamma(r_p, \theta_p) &\doteq -\frac{\partial W(r, \theta, \lambda)}{\partial r} \Big|_P + \frac{\partial U(r, \theta)}{\partial r} \Big|_P = \\ &= -\left( \frac{\partial W(r, \theta, \lambda)}{\partial r} \Big|_P - \frac{\partial U(r, \theta)}{\partial r} \Big|_P \right) = -\frac{\partial T(r, \theta, \lambda)}{\partial r} \Big|_P, \end{aligned} \quad (5.19)$$

kde  $\left. \frac{\partial T(r, \theta, \lambda)}{\partial r} \right|_P$  je zkrácený zápis derivace poruchového tíhového potenciálu  $T(r, \theta, \lambda)$

v bodě  $P$  o sférických souřadnicích  $(r_P, \theta_P, \lambda_P)$ .

V rovnici (5.19) je známou veličinou pouze měřené tíhové zrychlení  $g$  v bodě  $P$ . Hodnotu normálního tíhového zrychlení  $\gamma$  v bodě  $P$  na topografii můžeme určit, pokud známe elipsoidální výšku  $h$  bodu  $P$ , užitím Taylorova rozvoje:

$$\gamma(r_P, \theta_P) \doteq \gamma(r_{Q'}, \theta_{Q'}) + \left. \frac{\partial \gamma(r, \theta)}{\partial n} \right|_{Q'} h. \quad (5.20)$$

Normální tíhové zrychlení  $\gamma$  je analytická funkce, její rozvoj do Taylorovy řady je tedy možné provést. Hodnotu normálního tíhového zrychlení v bodě  $Q'$  na povrchu elipsoidu je možné spočítat, neboť normální tíhové pole je matematicky popsáno (viz rov. 2.18). Další členy Taylorova rozvoje lze zanedbat, neboť velmi rychle konvergují k nule. Při použití vztahu (5.20) lze rovnici pro tíhovou poruchu přepsat do tvaru

$$\delta g(r_P, \theta_P, \lambda_P) = g(r_P, \theta_P, \lambda_P) - \gamma(r_{Q'}, \theta_{Q'}) - \left. \frac{\partial \gamma(r, \theta)}{\partial n} \right|_{Q'} h. \quad (5.21)$$

V rovnici (5.21) jsou známé všechny hodnoty. Získáme tedy okrajovou podmínku pro poruchový tíhový potenciál  $T$  ve tvaru

$$\delta g(r_P, \theta_P, \lambda_P) = - \left. \frac{\partial T(r, \theta, \lambda)}{\partial r} \right|_P. \quad (5.22)$$

Tato okrajová podmínka se obecně nazývá Neumannova. Je součástí druhé (Neumannovy) okrajové úlohy teorie potenciálu. V konkrétním případě, kdy řešenou veličinou je poruchový tíhový potenciál  $T$ , se tato úloha nazývá Hotinova<sup>13</sup>.

## 5.2.2 Určení okrajové podmínky pomocí tíhové anomálie

Při odvozování okrajové podmínky pro poruchový tíhový potenciál  $T$  z tíhové poruchy jsme předpokládali, že v daném bodě  $P$  známe jeho elipsoidální výšku  $h$ . Pokud výška  $h$  není známa, je nutné použít při odvozování okrajové podmínky jinou veličinu, než je tíhová porucha v bodě  $P$ . Touto veličinou je tíhová anomálie  $\Delta g$ , která je n rozdíl od

<sup>13</sup> Hotine, Martin (1898-1968) – anglický geodet

tíhové poruchy určena ve dvou bodech  $P, P'$  ležících na dvou různých plochách. Pro tíhovou anomálii určenou z měření na povrchu topografie leží bod  $P$  na topografii a bod  $P'$  na Moloděnského telluroidu. Ze stejného důvodu jako v případě tíhové poruchy budeme uvažovat, že tíhová anomálie je skalární veličina. Zápis  $\Delta g(r_p, \theta_p, \lambda_p, r_{p'}, \theta_{p'})$  značí hodnotu tíhové anomálie v bodech  $P, P'$  o sférických souřadnicích  $(r_p, \theta_p, \lambda_p)$ ,  $(r_{p'}, \theta_{p'}, \lambda_{p'})$ . Body  $P, P'$  jsou voleny tak, aby splňovaly následující podmínky:

- body  $P, P'$  leží na normále k referenčnímu elipsoidu
- pro potenciál v bodech  $P, P'$  platí vztah

$$W(r_p, \theta_p, \lambda_p) = U(r_{p'}, \theta_{p'}), \quad (5.23)$$

kde  $W(r_p, \theta_p, \lambda_p)$  je tíhový potenciál na topografii,  $U(r_{p'}, \theta_{p'})$  je normální tíhový potenciál na Moloděnského telluroidu.

Pro tíhovou anomálii  $\Delta g(r_p, \theta_p, \lambda_p, r_{p'}, \theta_{p'})$  platí vztah

$$\Delta g(r_p, \theta_p, \lambda_p, r_{p'}, \theta_{p'}) = g(r_p, \theta_p, \lambda_p) - \gamma(r_{p'}, \theta_{p'}), \quad (5.24)$$

kde  $g(r_p, \theta_p, \lambda_p)$  je změřené skutečné tíhové zrychlení na topografii a  $\gamma(r_{p'}, \theta_{p'})$  je vypočtené normální tíhové zrychlení na Moloděnského telluroidu. Rovnici (5.24) dále upravíme:

$$\begin{aligned} \Delta g(r_p, \theta_p, \lambda_p, r_{p'}, \theta_{p'}) &= g(r_p, \theta_p, \lambda_p) - \gamma(r_p, \theta_p) + \gamma(r_p, \theta_p) - \gamma(r_{p'}, \theta_{p'}) = \\ &= \delta g(r_p, \theta_p, \lambda_p) + \gamma(r_p, \theta_p) - \gamma(r_{p'}, \theta_{p'}). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Hodnotu normálního tíhového potenciálu v bodě na topografii  $\gamma(r_p, \theta_p)$  lze opět určit pomocí Taylorova rozvoje tohoto potenciálu, tentokrát v bodě  $P'$  na Moloděnského telluroidu:

$$\gamma(r_p, \theta_p) \doteq \gamma(r_{p'}, \theta_{p'}) + \left. \frac{\partial \gamma(r, \theta)}{\partial n} \right|_{P'} \zeta, \quad (5.26)$$

kde  $\zeta$  je výšková anomálie bodů  $P, P'$ . Další členy Taylorova rozvoje jsou opět zanedbány, neboť řada rychle konverguje k nule. Po dosazení získáme vztah

$$\begin{aligned} \Delta g(r_p, \theta_p, \lambda_p, r_{p'}, \theta_{p'}) &= \delta g(r_p, \theta_p, \lambda_p) + \gamma(r_{p'}, \theta_{p'}) + \left. \frac{\partial \gamma(r, \theta)}{\partial n} \right|_{P'} \zeta - \gamma(r_{p'}, \theta_{p'}) = \\ &= \delta g(r_p, \theta_p, \lambda_p) + \left. \frac{\partial \gamma(r, \theta)}{\partial n} \right|_{P'} \zeta. \end{aligned} \quad (5.27)$$



Převýšení topografie nad Moloděnského telluroidem  $\zeta$  lze určit pomocí Brunsova teorému (viz kap. 5.6)

$$\zeta \doteq \frac{T(r_p, \theta_p, \lambda_p)}{\gamma(r_{p'}, \theta_{p'})}. \quad (5.28)$$

Dále vyjdeme z Moloděnského<sup>14</sup> rovnice pro normálový gradient normálního zrychlení  $\gamma$  (Heiskanen a Moritz 1967)

$$\frac{\partial \gamma}{\partial n} = -\frac{2\gamma}{a}(1 + m + f - 2f \sin^2 \varphi), \quad m = \frac{a\omega^2}{\gamma_e}, \quad (5.29)$$

kde  $a$  je velikost hlavní poloosy referenčního elipsoidu,  $f$  je zploštění referenčního elipsoidu,  $\omega$  je úhlová rychlost rotace Země a  $\gamma_e$  je normální tíhové zrychlení na rovníku. Pokud v této rovnici zanedbáme členy související s rotací Země (nabývají velmi malých hodnot) a zploštěním referenčního elipsoidu (zploštění  $f$  je velmi malé), získáme přibližný vztah pro normální tíhové zrychlení  $\gamma$  (Heiskanen a Moritz 1967)

$$\left. \frac{\partial \gamma(r, \theta)}{\partial n} \right|_{p'} \doteq -\frac{2}{a} \gamma(r_{p'}, \theta_{p'}), \quad (5.30)$$

kde  $a$  je velikost hlavní poloosy referenčního elipsoidu. Dosadíme do rovnice (5.27) a získáme vztah pro tíhovou anomálii

$$\begin{aligned} \Delta g(r_p, \theta_p, \lambda_p, r_{p'}, \theta_{p'}) &= \delta g(r_p, \theta_p, \lambda_p) + \left. \frac{\partial \gamma(r, \theta)}{\partial n} \right|_{p'} \frac{T(r_p, \theta_p, \lambda_p)}{\gamma(r_{p'}, \theta_{p'})} = \\ &= \delta g(r_p, \theta_p, \lambda_p) - \frac{2}{a} T(r_p, \theta_p, \lambda_p). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Při použití sférické aproximace  $n \sim r$  přejde rovnice (5.31) do tvaru

$$\Delta g(r_p, \theta_p, \lambda_p) = - \left. \frac{\partial T(r, \theta, \lambda)}{\partial r} \right|_p - \frac{2}{r_p} T(r_p, \theta_p, \lambda_p), \quad (5.32)$$

kde  $\Delta g(r_p, \theta_p, \lambda_p)$  je hodnota tíhové anomálie,  $T(r_p, \theta_p, \lambda_p)$  je hodnota poruchového tíhového potenciálu v bodě  $P$  na topografii a  $r_p$  je velikost průvodiče bodu  $P$  na topografii. Tato rovnice popisuje druhou možnost, jak může být zadána okrajová podmínka pro poruchový tíhový potenciál  $T$ . Tato okrajová podmínka se obecně nazývá Newtonova

<sup>14</sup> Moloděnskij, Michail Sergejevič (1909-1991) – ruský matematik a geodet

(Robinova) a je součástí třetí (smíšené) okrajové úlohy. Pro poruchový tíhový potenciál  $T$  se tato úloha nazývá Stokesova<sup>15</sup>.

Stejným postupem je možné popsat tíhovou anomálii, která je vztažena k bodům na geoidu a na referenčním elipsoidu. Sférickou aproximací  $n \sim r$  získáme vztah

$$\Delta g(r_Q, \theta_Q, \lambda_Q) = - \left. \frac{\partial T(r, \theta, \lambda)}{\partial r} \right|_Q - \frac{2}{r_P} T(r_Q, \theta_Q, \lambda_Q), \quad (5.33)$$

kde bod  $Q$  leží na geoidu (viz obr. 5-1).

### 5.3 Řešení Dirichletovy úlohy

Vnější Dirichletova úloha pro obecnou funkci  $\tau$  v bodě o souřadnicích  $(r, \theta, \lambda)$ , splňující Laplaceovu diferenciální rovnici vně uzavřené oblasti, má tvar

$$\begin{aligned} \nabla^2 \tau(r, \theta, \lambda) &= 0, \quad \text{pro } r > r_B, \\ \tau(r, \theta, \lambda) &= \tau(r_B, \theta_B, \lambda_B), \quad \text{pro } r = r_B, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \tau(r, \theta, \lambda) &= 0, \end{aligned} \quad (5.34)$$

kde  $\tau(r_B, \theta_B, \lambda_B)$  je známá plošně integrovatelná funkce, která určuje hodnoty funkce  $\tau(r, \theta, \lambda)$  na hranici oblasti. Tato úloha tedy určuje hodnotu funkce  $\tau$  vně hranice za předpokladu, že hodnota této funkce na hranici je známá. Necht' tato hranice vymezuje plochu o obsahu  $S$ , jejíž plošný element označíme  $dS$ . Řešením takto zadané Dirichletovy úlohy pro  $r \geq r_B$  je Abel-Poissonův integrál (Kellogg 1927, Bjerhammar 1963)

$$\tau(r, \theta, \lambda) = \frac{1}{S} \iint_S \tau(r_B, \theta_B, \lambda_B) K(r, \theta, \lambda, r_B, \theta_B, \lambda_B) dS(r_B, \theta_B, \lambda_B). \quad (5.35)$$

Integrační jádro  $K(r, \theta, \lambda, r_B, \theta_B, \lambda_B)$  se nazývá Greenova funkce. Pokud bude  $S$  povrch náhradní koule o poloměru  $R$ , je obsah příslušné kulové plochy dán vztahem  $S = 4\pi R^2$  a plošný element ve sférických souřadnicích je určen vztahem  $dS = R^2 \sin \theta d\lambda d\theta$ . Abel-Poissonův integrál je potom popsán rovnicí

<sup>15</sup> Stokes, George Gabriel (1819-1903) – irský matematik a fyzik

$$\tau(r, \theta, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\theta_B, \lambda_B} \tau(R, \theta_B, \lambda_B) K(r, \psi, R) \sin \theta_B d\lambda_B d\theta_B, \quad (5.36)$$

kde  $\psi$  je úhlová sférická vzdálenost mezi bodem vně náhradní koule o sférických souřadnicích  $(r, \theta, \lambda)$ , ve kterém je určována hodnota funkce  $\tau$ , a integračním bodem na povrchu náhradní koule o sférických souřadnicích  $(R, \theta_B, \lambda_B)$ . Úhlová sférická vzdálenost  $\psi$  je určena vztahem

$$\cos \psi = \cos \theta \cos \theta_B + \sin \theta \sin \theta_B \cos(\lambda - \lambda_B). \quad (5.37)$$

V případě integrace přes náhradní kouli o poloměru  $R$  je možné integrační jádro  $K$  vyjádřit analyticky pomocí nekonečné řady (Kellogg 1927)

$$K(r, \psi, R) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \psi), \quad (5.38)$$

kde  $P_n$  je Legendreův polynom prvního druhu (viz Dodatek C, rov. C.7), nebo v uzavřeném tvaru

$$K(r, \psi, R) = \frac{r(r^2 - R^2)}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \psi)^{\frac{3}{2}}}. \quad (5.39)$$

V předchozím odstavci jsme předpokládali, že hranicí přes kterou se integruje je kulová plocha  $S$ . V geodézii se jako hraniční plocha využívá také referenční elipsoid. Vzhledem k symetrii referenčního elipsoidu je možné i v tomto případě určit integrační jádro, které je ale mnohem složitější než integrační jádro pro kouli.

Při určování poruchového tíhového potenciálu  $T$  pomocí rovnice (5.36) je však nutné řešit inverzní úlohu (Fredholmův integrál prvního druhu), protože neznámou funkcí je v tomto případě poruchový tíhový potenciál  $T(R, \theta_B, \lambda_B)$  v bodech na náhradní kouli, tj. uvnitř integrálu. Řešení tohoto numericky nestabilního integrálu je popsáno v následující kapitole.

## 5.4 Využití Dirichletovy úlohy při popisu tíhového pole

Základní problém při řešení poruchového tíhového potenciálu je rozpor mezi daty, která jsou vyžadována vzhledem k použitým matematickým metodám, a mezi daty, která je

skutečně možné měřit. Při řešení Dirichletovy úlohy předpokládáme nejprve znalost poruchového tíhového potenciálu  $T$  na geoidu. Hodnotu poruchového tíhového potenciálu  $T$  ale není možné přímo měřit. Proto nelze využít klasické řešení Dirichletovy úlohy s okrajovou podmínkou

$$T(r, \theta, \lambda) = T(r_B, \theta_B, \lambda_B) \quad \text{pro } r = r_B, \quad (5.40)$$

kde  $T(r_B, \theta_B, \lambda_B)$  je hodnota poruchového tíhového potenciálu na geoidu, kterým je Abel-Poissonův integrál

$$T(r, \theta, \lambda) = \frac{1}{S} \iint_S T(r_B, \theta_B, \lambda_B) K(r, \theta, \lambda, r_B, \theta_B, \lambda_B) dS(r_B, \theta_B, \lambda_B). \quad (5.41)$$

Pokud v bodě o sférických souřadnicích  $(r, \theta, \lambda)$  ležícím vně geoidu aplikujeme obecný diferenciální operátor  $f$  na rovnici (5.41), získáme modifikované řešení Dirichletovy úlohy s okrajovou podmínkou (5.40), opět ve formě Abel-Poissonova integrálu (Novák 2003):

$$f[T(r, \theta, \lambda)] = \frac{1}{S} \iint_S T(r_B, \theta_B, \lambda_B) f[K(r, \theta, \lambda, r_B, \theta_B, \lambda_B)] dS(r_B, \theta_B, \lambda_B), \quad (5.42)$$

kde  $K(r, \theta, \lambda, r_B, \theta_B, \lambda_B)$  je stejné integrační jádro jako v klasické Dirichletově úloze. Protože geoid není znám, použijeme opět jako hranici náhradní kouli o poloměru  $R$ . Získáme tak řešení modifikované Dirichletovy úlohy ve tvaru

$$f[T(r, \theta, \lambda)] = \frac{1}{4\pi} \iint_{\theta_B, \lambda_B} T(R, \theta_B, \lambda_B) f[K(r, \psi, R)] \sin \theta_B d\lambda_B d\theta_B. \quad (5.43)$$

V kapitole 5.2.1 a 5.2.2 byly při použití sférické aproximace odvozeny dvě okrajové podmínky, které je možné použít při řešení poruchového tíhového potenciálu:

$$\delta g(r_P, \theta_P, \lambda_P) = - \left. \frac{\partial T(r, \theta, \lambda)}{\partial r} \right|_P, \quad (5.44)$$

$$\Delta g(r_P, \theta_P, \lambda_P) = - \left. \frac{\partial T(r, \theta, \lambda)}{\partial r} \right|_P - \frac{2}{r_P} T(r_P, \theta_P, \lambda_P), \quad (5.45)$$

kde  $T(r_P, \theta_P, \lambda_P)$  je hodnota poruchového tíhového potenciálu v bodě  $P$  o souřadnicích  $(r_P, \theta_P, \lambda_P)$ , který leží na topografii. V případě tíhové poruchy  $\delta g$  byl na poruchový tíhový potenciál  $T$  použit operátor  $f_1$ :

$$f_1 = - \frac{\partial}{\partial r}, \quad (5.46)$$

v případě tíhové anomálie  $\Delta g$  byl použit operátor  $f_2$  :

$$f_2 = -\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r}. \quad (5.47)$$

Aplikací operátorů  $f_1, f_2$  v bodě  $P$  na Abel-Poissonův integrál získáme řešení ve tvaru:

$$\delta g(r_p, \theta_p, \lambda_p) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\theta_B \lambda_B} T(R, \theta_B, \lambda_B) f_1[K(r_p, \psi, R)] \sin \theta_B d\lambda_B d\theta_B, \quad (5.48)$$

$$\Delta g(r_p, \theta_p, \lambda_p) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\theta_B \lambda_B} T(R, \theta_B, \lambda_B) f_2[K(r_p, \psi, R)] \sin \theta_B d\lambda_B d\theta_B, \quad (5.49)$$

kde  $T(R, \theta_B, \lambda_B)$  je určovaná hodnota poruchového tíhového potenciálu  $T$  v bodech o souřadnicích  $(R, \theta_B, \lambda_B)$ , které leží na náhradní kouli, a  $f[K(r_p, \psi, R)]$  je příslušné integrační jádro, které lze odvodit aplikací příslušného operátoru na funkci v rovnici (5.39). Hodnoty tíhové poruchy a tíhové anomálie v bodě  $P$  na povrchu topografie je možné určit z tíhových měření. Výsledkem této úlohy je hodnota poruchového tíhového potenciálu  $T$  na náhradní kouli. Tento postup spojuje klasické dvoukrokové řešení poruchového tíhového potenciálu na geoidu (viz kap. 5.5) do jednoho kroku, kterým je řešení Fredholmova integrálu prvního druhu.

### 5.4.1 Řešení inverzní Dirichletovy úlohy

Pomocí integrálů (5.48) a (5.49) nelze poruchový tíhový potenciál  $T$  spojitě řešit. Pravou stranu rovnice (5.48) je nutné převést na diskrétní tvar

$$\delta g(r_p, \theta_p, \lambda_p) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \iint_{\Delta\Omega_i} T(R, \theta_B, \lambda_B) f_1[K(r_p, \psi, R)] d\Omega(\theta_B, \lambda_B), \quad (5.50)$$

kde  $\Delta\Omega_i$  je konečný element prostorového úhlu  $\Omega$ , který vznikl diskretizací integrálu přes celý prostorový úhel  $\Omega$ . Použitím věty o střední hodnotě (Drábek, Míka 1999) lze rovnici (5.50) přepsat do tvaru

$$\delta g(r_p, \theta_p, \lambda_p) \doteq \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \bar{T}(\Delta\Omega_i) \iint_{\Delta\Omega_i} f_1[K(r_p, \psi, R)] d\Omega(\theta_B, \lambda_B) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \bar{T}(\Delta\Omega_i) K_i^*, \quad (5.51)$$

kde  $\bar{T}(\Delta\Omega_i)$  je střední hodnota poruchového tíhového potenciálu na elementu povrchu náhradní koule určeném prostorovým úhlem  $\Delta\Omega_i$ . Hodnotu  $K_i^*$  integračního jádra lze

získat integrací funkce  $f_1[K(r_p, \psi, R)]$  na příslušném plošném elementu náhradní koule daném prostorovým úhlem  $\Delta\Omega_i$ . Získáme tak přeúřčenou soustavu rovnic, kterou lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{I} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{t}}, \quad (5.52)$$

kde  $\mathbf{I}$  je vektor měřených hodnot tíhové poruchy  $\delta g(r_p, \theta_p, \lambda_p)$ ,  $\mathbf{A}$  je matice soustavy a  $\bar{\mathbf{t}}$  je vektor hledaných středních hodnot poruchového tíhového potenciálu, tj.

$$\bar{\mathbf{t}} = [\bar{T}(\Delta\Omega_1), \bar{T}(\Delta\Omega_2), \dots, \bar{T}(\Delta\Omega_n)]^T. \quad (5.53)$$

Obdobně lze diskretizovat pravou stranu integrálu v rovnici (5.49)

$$\Delta g(r_p, \theta_p, \lambda_p) \doteq \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \bar{T}(\Delta\Omega_i) K_i^{**}, \quad (5.54)$$

kde hodnota  $K_j^{**}$  integračního jádra byla získána integrací funkce  $f_2[K(r_p, \psi, R)]$  na příslušném plošném elementu povrchu náhradní koule určeném prostorovým úhlem  $\Delta\Omega_i$ .

Vzniklou soustavu rovnic lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{k} = \mathbf{B}\bar{\mathbf{t}}, \quad (5.55)$$

kde  $\mathbf{k}$  je vektor měřených hodnot tíhové anomálie  $\Delta g(r_p, \theta_p, \lambda_p)$ ,  $\mathbf{B}$  je matice soustavy a  $\bar{\mathbf{t}}$  je vektor hledaných středních hodnot poruchového tíhového potenciálu, viz rov. (5.53).

## 5.5 Dvoustupňové řešení poruchového tíhového potenciálu

Úlohu na určení poruchového tíhového potenciálu  $T$  na geoidu je možné řešit také dvoustupňově. Existují dva způsoby dvoustupňového řešení, které se opět liší vstupními daty. Pokud známe elipsoidální výšku  $h$  bodů, ve kterých bylo měřeno tíhové zrychlení, vychází se při řešení ze vztahu pro tíhovou poruchu  $\delta g$ . Pokud elipsoidální výška není dána, je nutné použít vztah pro tíhovou anomálii  $\Delta g$ . Tento způsob je tradičně používán při výpočtech geoidu.

### 5.5.1 Řešení pomocí tíhové poruchy

Ze vztahu pro tíhovou poruchu lze odvodit vztah (5.22) mezi poruchovým tíhovým potenciálem  $T$  v bodě na topografii a hodnotou tíhové poruchy  $\delta g$  ve stejném bodě. Pro výpočet poruchového tíhového potenciálu na geoidu je ale nutná znalost tíhové poruchy v bodě na geoidu a nikoli v bodě na topografii. Problém převodu hodnot tíhové poruchy z povrchu topografie na geoid se nazývá harmonické prodlužování tíhových dat. Tato úloha je založena na vnější Dirichletově úloze s volnou hranicí, která je zadaná vztahy

$$\begin{aligned} \nabla^2 r \delta g(r, \theta, \lambda) &= 0, \quad \text{pro body vně geoidu,} \\ r \delta g(r, \theta, \lambda) &= r_Q \delta g(r_Q, \theta_Q, \lambda_Q), \quad \text{pro bod } Q \text{ na geoidu,} \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \delta g(r, \theta, \lambda) &= 0^{16}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Protože průběh geoidu není znám, budeme v dalším textu opět aproximovat geoid náhradní koulí o poloměru  $R$ . V úloze popsané vztahy (5.56) jsou známé hodnoty tíhové poruchy  $\delta g$  v bodech na topografii, tj. vně geoidu. Vzhledem k podmínce harmoničnosti tíhové poruchy vně geoidu je nutné opravit vstupní data o vliv topografických hmot a atmosféry (Heiskanen a Moritz 1967). V této diplomové práci tato problematika není diskutována. Nechť je bod  $P$  na topografii opět určen souřadnicemi  $(r_P, \theta_P, \lambda_P)$ . Řešením Dirichletovy úlohy v tomto bodě je Abel-Poissonův integrál

$$r_P \delta g(r_P, \theta_P, \lambda_P) = \frac{R}{4\pi} \iint_{\theta_Q \lambda_Q} \delta g(R, \theta_Q, \lambda_Q) K(r_P, \psi, R) \sin \theta_Q d\lambda_Q d\theta_Q. \quad (5.57)$$

Integrál přes náhradní kouli je v tomto případě možné nahradit integrálem přes její část. Váhovým parametrem vlivu hodnot  $\delta g(R, \theta_Q, \lambda_Q)$  na hodnotu tíhové poruchy v určovaném bodě  $P$  je integrační jádro  $K(r_P, \psi, R)$ . Z průběhu této funkce je zřejmé, že se vliv hodnot  $\delta g(R, \theta_Q, \lambda_Q)$  s rostoucí hodnotou sférické vzdálenosti  $\psi$  rychle snižuje. Hodnota  $\delta g(r_P, \theta_P, \lambda_P)$  je tedy ovlivněna především hodnotami tíhové poruchy v bodech na náhradní kouli, které jsou nejbližší výpočetnímu bodu. Je tedy možné integrovat s vysokou přesností pouze lokálně. Lokální integrace umožňuje řešit inverzní úlohu, kde

<sup>16</sup> Podmínka regularity tíhové poruchy v nekonečnu je splněna. Tento vztah plyne přímo z definice tíhové poruchy.

neznámé hodnoty  $\delta g(R, \theta_Q, \lambda_Q)$  jsou uvnitř integrálu (viz kap. 5.4.1). Získáme tak diskrétní hodnoty tíhové poruchy  $\delta g(R, \theta_Q, \lambda_Q)$  v bodech na náhradní kouli o poloměru  $R$ .

Pokud již známe hodnoty tíhové poruchy  $\delta g(R, \theta_Q, \lambda_Q)$  na náhradní kouli aproximující geoid, můžeme řešit převod těchto hodnot na poruchový tíhový potenciál  $T$ . Vztah mezi tíhovou poruchou a poruchovým tíhovým potenciálem popisuje rovnice (5.22) odvozená v kapitole 5.2.1:

$$\delta g(R, \theta_Q, \lambda_Q) = - \left. \frac{\partial T(r, \theta, \lambda)}{\partial r} \right|_Q. \quad (5.58)$$

Řešíme tedy druhou (Neumannovu) okrajovou úlohu, která je zadána vztahy

$$\begin{aligned} \nabla^2 T(r, \theta, \lambda) &= 0, \quad \text{pro } r > R, \\ - \left. \frac{\partial T(r, \theta, \lambda)}{\partial r} \right|_Q &= \delta g(R, \theta_Q, \lambda_Q), \quad \text{pro } r = R, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} T(r, \theta, \lambda) &= 0. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Řešením této úlohy pro body na náhradní kouli o poloměru  $R$  je Greenův integrál

$$T(R, \theta, \lambda) = \frac{R}{4\pi} \iint_{\theta_Q, \lambda_Q} \delta g(R, \theta_Q, \lambda_Q) H(\psi) \sin \theta_Q d\lambda_Q d\theta_Q. \quad (5.60)$$

Integrační jádro  $H(\psi)$  se nazývá Hotinova sférická funkce (Hotine 1969). Tato funkce je určena řadou

$$H(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} P_n(\cos \psi), \quad (5.61)$$

kde  $P_n$  je Legendreův polynom prvního druhu. Hotinovu sférickou funkci lze popsat také uzavřenou formulí (Hotine 1969):

$$H(\psi) = \left( \sin \frac{\psi}{2} \right)^{-1} - \ln \left[ 1 + \left( \sin \frac{\psi}{2} \right)^{-1} \right]. \quad (5.62)$$



### 5.5.2 Řešení pomocí tíhové anomálie

Pokud neznáme elipsoidální výšky bodů, ve kterých bylo měřeno tíhové zrychlení  $g$ , nemůžeme určit tíhovou poruchu  $\delta g$  v bodech na topografii. Proto je nutné použít veličinu, která tíhovou poruchu nahrazuje. Touto veličinou je tíhová anomálie  $\Delta g$ , která je vztažena ke dvěma bodům, z nichž jeden leží na topografii a druhý na Moloděnského telluroidu. Tíhovou anomálii lze odvodit z normálních výšek, které je možné určit z nivelačních měření. Při použití sférické aproximace uvedené v kapitole 5.2.2 se tíhová anomálie vztahuje pouze k bodu  $P$  o souřadnicích  $(r_p, \theta_p, \lambda_p)$  ležícímu na topografii.

Tíhovou anomálii  $\Delta g$  na topografii lze určit z tíhových měření. Stejně jako v případě tíhové poruchy, také v tomto případě je pro další výpočty nutné znát hodnotu tíhové anomálie nikoli na topografii, ale na geoidu. Tento převod opět vychází z vnější Dirichletovy úlohy, kde volnou hranici – geoid nahradíme koulí o poloměru  $R$ . Řešením je opět Abel-Poissonův integrál

$$r_p \Delta g(r_p, \theta_p, \lambda_p) = \frac{R}{4\pi} \iint_{\theta_Q, \lambda_Q} \Delta g(R, \theta_Q, \lambda_Q) K(r_p, \psi, R) \sin \theta_Q d\lambda_Q d\theta_Q. \quad (5.63)$$

Hledané hodnoty tíhové anomálie  $\Delta g(R, \theta_Q, \lambda_Q)$  získáme opět řešením inverzní úlohy (viz kap. 5.4.1).

Tíhová anomálie  $\Delta g(R, \theta_Q, \lambda_Q)$  určená v předchozím odstavci definuje okrajovou podmínku pro třetí (Newtonovu, Robinovu) okrajovou úlohu, která se pro poruchový tíhový potenciál  $T$  nazývá Stokesova úloha:

$$\begin{aligned} \nabla^2 T(r, \theta, \lambda) &= 0, \quad \text{pro } r > R, \\ -\frac{\partial T(r, \theta, \lambda)}{\partial r} \Big|_Q - \frac{2}{R} T(R, \theta_Q, \lambda_Q) &= \Delta g(R, \theta_Q, \lambda_Q), \quad \text{pro } r = R, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} T(r, \theta, \lambda) &= 0. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Řešením této úlohy pro body na náhradní kouli o poloměru  $R$  je Greenův integrál

$$T(R, \theta, \lambda) = \frac{R}{4\pi} \iint_{\theta_Q, \lambda_Q} \Delta g(R, \theta_Q, \lambda_Q) S(\psi) \sin \theta_Q d\lambda_Q d\theta_Q. \quad (5.65)$$

Integrační jádro  $S(\psi)$  se nazývá Stokesova sférická funkce (Stokes 1849; Heiskanen a Moritz 1967). Stokesova funkce je určena řadou

$$S(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi), \quad (5.66)$$

kde  $P_n$  je opět Legendreův polynom prvního druhu. Lze ji popsat také uzavřenou formulí (Stokes 1849):

$$S(\psi) = \left( \sin \frac{\psi}{2} \right)^{-1} - 6 \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \ln \left( \sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right). \quad (5.67)$$

## 5.6 Brunsův teorém

Stokesova a Hotinova úloha umožňují určit poruchový tíhový potenciál  $T$  na geoidu z tíhových dat, která je možné měřit na povrchu či vně Země. Z hodnot poruchového tíhového potenciálu  $T$  je potom možné určit hodnoty tíhového potenciálu  $W$ , který popisuje skutečné tíhové pole Země. K určení průběhu geoidu je ale potřeba určit geoidální výšky  $N$ . Převod poruchového tíhového potenciálu  $T$  na výšky  $N$  umožňuje *Brunsov teorém*.

Geoid je hladinová plocha tíhového pole Země s konstantní hodnotou tíhového potenciálu  $W = W_0 = konst.$  Referenční elipsoid je definován jako hladinová plocha normálního tíhového pole s konstantní hodnotou normálního tíhového potenciálu  $U_0$ , která je rovna tíhovému potenciálu na geoidu, tj.  $U_0 = W_0$ . Pro bod  $Q$  na geoidu o souřadnicích  $(r_Q, \theta_Q, \lambda_Q)$  a bod  $Q'$  na referenčním elipsoidu o souřadnicích  $(r_{Q'}, \theta_{Q'}, \lambda_{Q'})$  tedy platí

$$W(r_Q, \theta_Q, \lambda_Q) = U(r_{Q'}, \theta_{Q'}) = W_0, \quad (5.68)$$

kde  $W(r_Q, \theta_Q, \lambda_Q)$  je skutečný tíhový potenciál v bodě na geoidu a  $U(r_{Q'}, \theta_{Q'})$  normální tíhový potenciál v bodě na referenčním elipsoidu. Nechť tyto body leží na normále k referenčnímu elipsoidu. Potom lze vyjádřit hodnotu normálního tíhového potenciálu v bodě na geoidu pomocí prvních dvou členů Taylorova rozvoje

$$U(r_Q, \theta_Q) \doteq U(r_{Q'}, \theta_{Q'}) + \left. \frac{\partial U(r, \theta)}{\partial n} \right|_{Q'} N, \quad (5.69)$$

kde  $N$  je geoidální výška. Řada velmi rychle konverguje k nule, další členy je tedy možné zanedbat. Z definice normálního tíhového zrychlení lze odvodit vztah

$$\gamma(r_{Q'}, \theta_{Q'}) = - \left. \frac{\partial U(r, \theta)}{\partial n} \right|_{Q'}, \quad (5.70)$$

kde  $\gamma(r_{Q'}, \theta_{Q'})$  je složka normálního tíhového zrychlení ve směru normály  $n$  k elipsoidu.

Po dosazení tohoto vztahu do rovnice (5.69) lze vyjádřit hledanou geoidální výšku  $N$  :

$$N \doteq \frac{U(r_Q, \theta_Q) - U(r_{Q'}, \theta_{Q'})}{-\gamma(r_{Q'}, \theta_{Q'})}. \quad (5.71)$$

Navíc platí, že

$$U(r_{Q'}, \theta_{Q'}) = W_0 = W(r_Q, \theta_Q, \lambda_Q), \quad (5.72)$$

tedy po dosazení

$$N \doteq \frac{U(r_Q, \theta_Q) - W(r_Q, \theta_Q, \lambda_Q)}{-\gamma(r_{Q'}, \theta_{Q'})} = \frac{-T(r_Q, \theta_Q, \lambda_Q)}{-\gamma(r_{Q'}, \theta_{Q'})}. \quad (5.73)$$

Pro geoidální výšku  $N$  bodu  $Q$  o souřadnicích  $(r_Q, \theta_Q, \lambda_Q)$  ležícím na geoidu tak získáme vztah (Heiskanen a Moritz 1967)

$$N \doteq \frac{T(r_Q, \theta_Q, \lambda_Q)}{\gamma(r_{Q'}, \theta_{Q'})}, \quad (5.74)$$

kde  $T(r_Q, \theta_Q, \lambda_Q)$  je poruchový tíhový potenciál v bodě  $Q$  na geoidu a  $\gamma(r_{Q'}, \theta_{Q'})$  je hodnota normálního tíhového zrychlení v bodě  $Q'$  na referenčním elipsoidu. Nyní je zřejmé, proč jsme se snažili vypočítat poruchový tíhový potenciál  $T$  na geoidu.

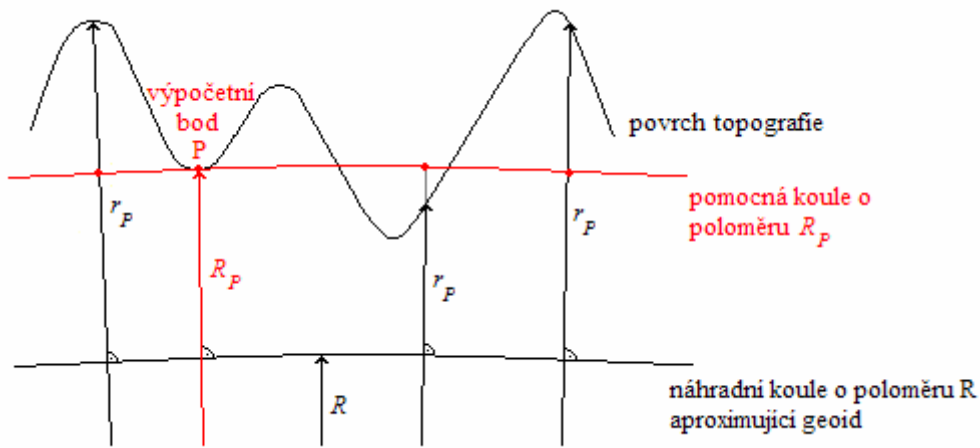
## 5.7 Moloděnského úloha

Všechny úlohy, které byly popsány v předchozích kapitolách, vedly k určení geoidu. Během řešení bylo nutné nejdříve známé hodnoty tíhového zrychlení redukovat o vliv všech hmot vně geoidu a převést je z povrchu Země (topografie) na geoid. Úloha harmonického prodlužování tíhových dat je ale inverzní úloha. Navíc jsou data převáděna na plochu, která není známá. Dále je nutné měřené hodnoty tíže opravit o topografické redukce, které je pro neznalost přesného rozložení hmot uvnitř topografie velmi složité spočítat. Výsledkem tedy bude pouze přibližné řešení geoidu. Moloděnského úloha (Moloděnskij 1945) řeší poruchový tíhový potenciál  $T$  přímo na topografii. Proto zde

odpadá krok, ve kterém byla data harmonicky prodlužována na geoid. Nemusí se tedy řešit žádná inverzní úloha ani zavádět topografické či atmosférické korekce. Nevýhoda této úlohy ale spočívá ve velmi komplikované hranici, na které probíhá výpočet. V předchozích případech bylo možné nahradit hranici – geoid náhradní koulí, popř. referenčním elipsoidem. Při lokálním řešení jsou odchylky obou náhradních ploch od geoidu velmi malé. V Moloděnského úloze je ale hranicí povrch topografie, jehož odchylky od referenčního elipsoidu dosahují až několika kilometrů. Topografii tedy nelze bez dalších oprav aproximovat jednoduchou náhradní plochou. Proto není poruchový tíhový potenciál  $T$  určen stejně jako v předchozích případech jednou integrální rovnicí, ale je vyjádřen ve formě nekonečné řady

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} T_n . \quad (5.75)$$

Poruchový tíhový potenciál určený Moloděnského úlohou na povrchu topografie také nevede k určení geoidálních výšek, ale vede k určení výškových anomálií. Řešením je tedy kvazigeoid. Členy řady definované v rovnici (5.75) je možné určit různými způsoby. Jednou z možností je řešení rakouského geodeta Moritze (Fei 2000), který analyticky prodloužil tíhové anomálie z topografie na pomocnou kouli procházející výpočetním bodem  $P$  o souřadnicích  $(R_p, \theta_p, \lambda_p)$  a na tyto tíhové anomálie následně aplikoval sférickou Stokesovu formuli. Člen nultého řádu  $T_0$  ve výpočetním bodě  $P$  na topografii popisuje hodnotu poruchového tíhového potenciálu v tomto bodě za předpokladu, že hodnoty tíhové anomálie jsou naměřeny v bodech na pomocné kouli o poloměru  $R_p$  a nikoli v bodech na povrchu topografie o souřadnicích  $(r_p, \theta, \lambda)$  - viz obr. 5-2 (index  $P$  u souřadnice  $r_p$  značí, že se jedná o body na povrchu topografie).



Obrázek 5-2: Rozložení dat v Moloděnského úloze

Člen  $T_0$  je potom dán sférickou Stokesovou formulí (viz rov. 5.65)

$$T_0(R_p, \theta_p, \lambda_p) = \frac{R_p}{4\pi} \iint_{\theta, \lambda} \Delta g(r_p, \theta, \lambda) S(\psi) \sin \theta d\lambda d\theta, \quad (5.76)$$

kde  $R_p$  je poloměr koule, která nahrazuje topografii v bodě  $P$ ,  $\Delta g(r_p, \theta'_p, \lambda'_p)$  je tíhová anomálie v bodech na topografii. Členy  $T_n$  jsou tedy obecně dány vztahem

$$T_n(R_p, \theta_p, \lambda_p) = \frac{R_p}{4\pi} \iint_{\theta, \lambda} g_n S(\psi) \sin \theta d\lambda d\theta, \quad (5.77)$$

kde

$g_0 = \Delta g$  v bodech na topografii,

$$g_1 = -(H - H_p) L(g_0), \quad (5.78)$$

$$g_2 = -(H - H_p)^2 L[L(g_0)],$$

...

Operátor  $L$  je dán rovnicí

$$L(f) = -\frac{f_p}{R} + \frac{R^2}{2\pi} \iint_S \frac{f - f_p}{l_0^3} dS. \quad (5.79)$$

V uvedených rovnicích je  $H$  ortometrická výška bodů přes které se integruje,  $H_p$  je ortometrická výška výpočetního bodu  $P$ ,  $R$  je poloměr koule aproximující geoid,  $f_p$  je hodnota funkce  $f$  v bodě  $P$ ,  $l_0$  je sférická vzdálenost bodů ležících na kouli o poloměru  $R$ , tj.  $l_0 = 2R \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)$ .

Ačkoli není zcela vyřešen problém důkazu konvergence řady (5.75), stačí pro výpočet poruchového tíhového potenciálu použít pouze několik prvních členů této řady<sup>17</sup>.

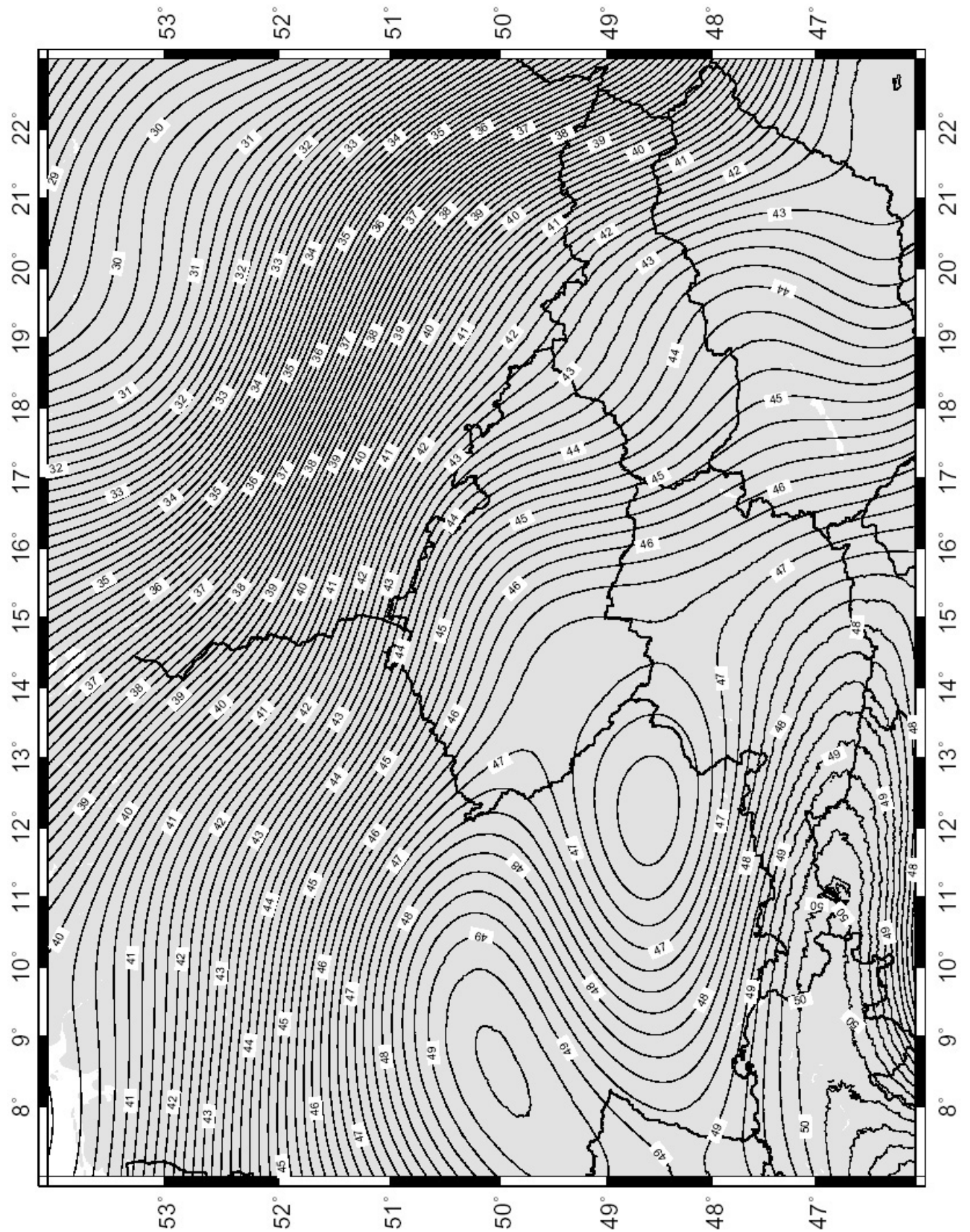
## **5.8 Ukázka výpočtu kvazigeoidu na základě kombinace tíhových měření**

Jak bylo řečeno v úvodu kapitoly 5, tíhový potenciál  $W$  je možné rozdělit vzhledem k měřeným datům na globální a reziduální složku. Globální složku tíhového potenciálu  $W$  je možné popsat pomocí sférické harmonické řady (viz. kap. 3.1.2). Reziduální složka se pak řeší především pomocí okrajových úloh popsaných v kapitolách 5.4 a 5.5. Způsob určení tíhového potenciálu  $W$  kombinací globální a reziduální složky nebyl v této práci diskutován.

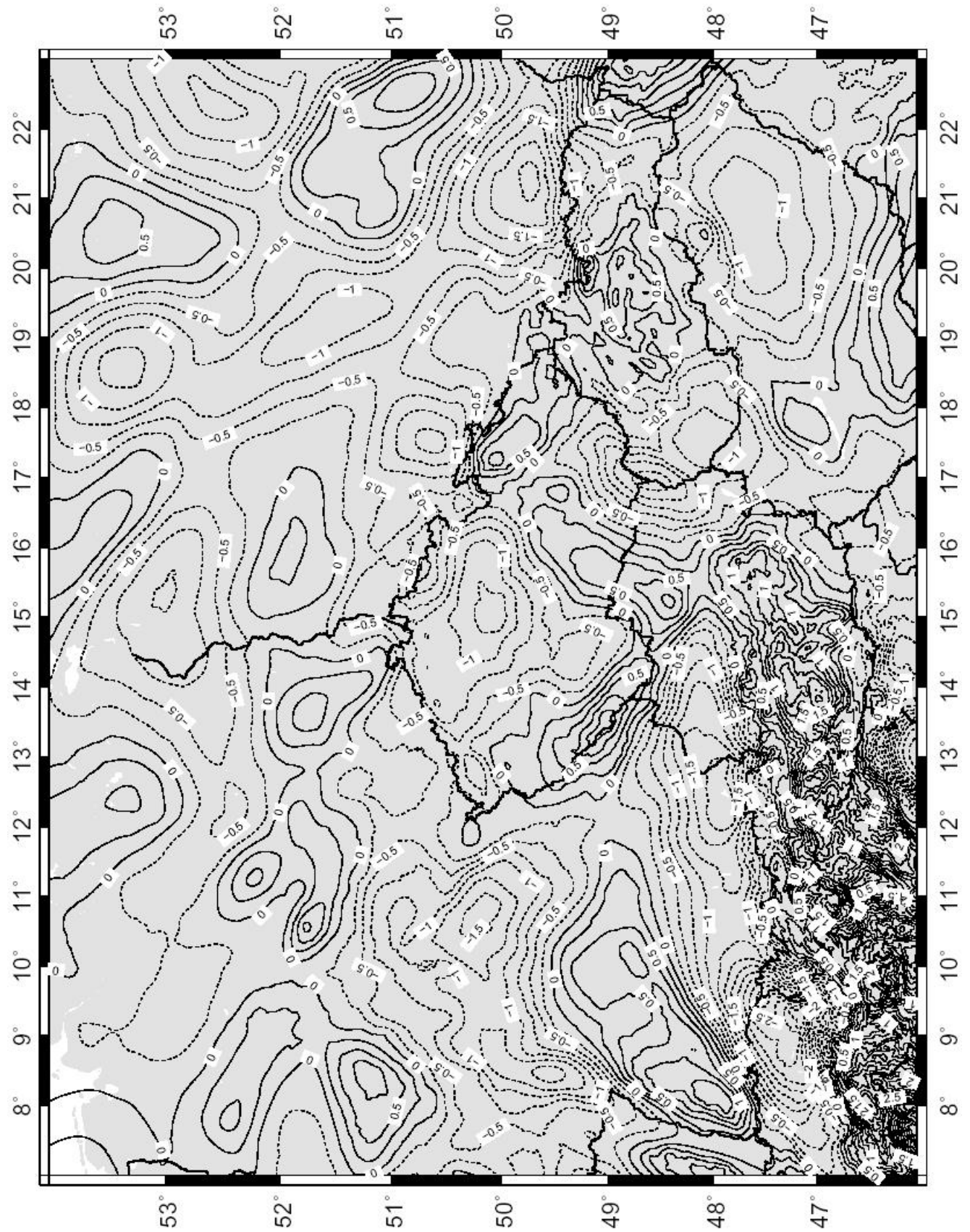
Cílem tíhových měření často není popis tíhového potenciálu  $W$ , ale určení jeho konkrétní hladinové plochy – geoidu. V zemích, kde se používají normální výšky, je geoid nahrazen kvazigeoidem. Následující ukázka popisuje výsledky měření kvazigeoidu na území České republiky (Novák 2006). Obr. 5-3 zobrazuje kvazigeoid určený součtem sférické harmonické řady do stupně  $n = 120$ . Reziduální složka byla získána z měřených lokálních tíhových dat, z nichž byla odečtena data již zahrnutá v globální složce popsané harmonickou řadou. Reziduální složka je zobrazena na obr. 5-4. Výsledný kvazigeoid (viz obr. 5-5) je určen součtem globální a reziduální složky (tj. hodnot na obr. 5-3 a 5-4).

---

<sup>17</sup> Počet použitých členů řady závisí na členitosti terénu. I ve vysokých horách ale většinou stačí použít první dva členy řady.

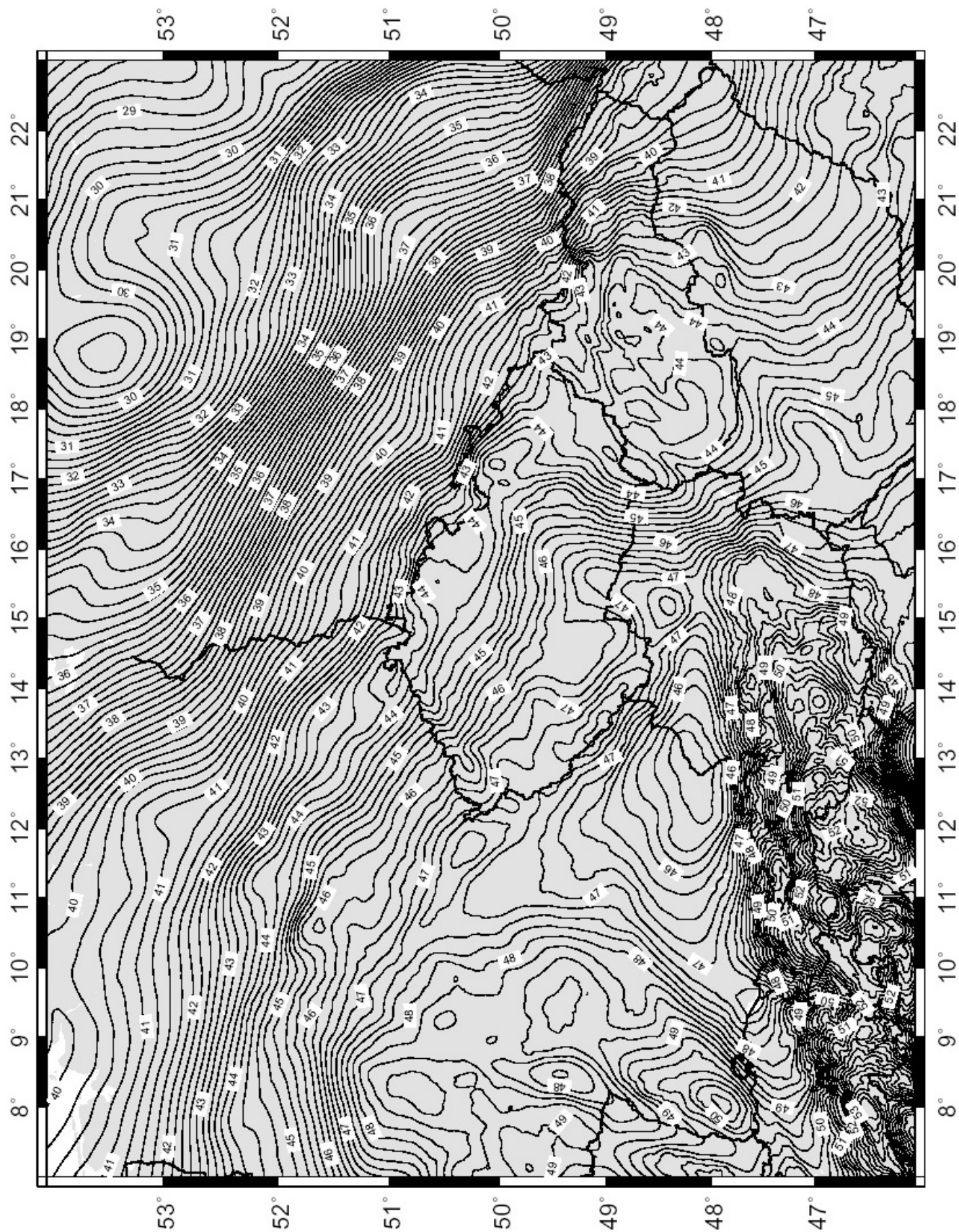


Obrázek 5-3: Kvazigeoid (v metrech) - globální složka určená sférickou harmonickou řadou do  $n=120$  (zdroj: Novák 2006)



Obrázek 5-4: Kvazigeoid (v metrech) - reziduální složka pro  $n \geq 121$  (zdroj: Novák 2006)





Obrázek 5-5: Kvazigeoid (v metrech) na území ČR (zdroj: Novák 2006)

## 6 Odhad chyb určovaných parametrů

Chyby určovaných parametrů je možné určit pomocí zákona hromadění středních chyb. Tento zákon popisuje, jak chyby vstupních dat ovlivní přesnost výstupních veličin. Necht' jsou určované veličiny  $x_1, x_2, \dots, x_m$  dány lineárními rovnicemi s měřenými hodnotami  $l_1, l_2, \dots, l_n$ :

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{l}, \quad (6.1)$$

kde  $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \dots, l_n)^T$  je vektor měřených hodnot,  $\mathbf{A}$  je matice soustavy lineárních rovnic,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$  je vektor neznámých. Předpokládáme, že kovarianční matice  $\Sigma_l$  měřených hodnot  $l_1, l_2, \dots, l_n$  je také známa. Matice  $\Sigma_l$  má na diagonále variance měřených hodnot  $l_i$ , prvky mimo hlavní diagonálu (kovariance) popisují vzájemnou závislost měřických chyb hodnot  $l_i$ . Za předpokladu, že chyby měřených hodnoty  $l_1, l_2, \dots, l_n$  jsou navzájem lineárně nezávislé (při měření se nevyskytovaly systematické chyby), potom matice  $\Sigma_l$  je diagonální:

$$\Sigma_l = \begin{bmatrix} \sigma_{l_1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{l_2}^2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_{l_n}^2 \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

kde  $\sigma_{l_i}^2$  je variance (střední kvadratická chyba) příslušné naměřené hodnoty  $l_i$ . Zákon hromadění středních chyb je popsán vztahem (Reif 2004)

$$\Sigma_x = \mathbf{A}\Sigma_l\mathbf{A}^T, \quad (6.3)$$

kde  $\Sigma_x$  je kovarianční matice určovaných veličin  $x_i$  ve vektoru  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{A}$  je matice soustavy lineárních rovnic (6.1). Kovarianční matice  $\Sigma_x$  obsahuje na diagonále hledané variance veličin  $x_i$ .

V teorii tíhového potenciálu se poruchový tíhový potenciál  $T$  řeší nejčastěji pomocí dvou úloh – Stokesovy úlohy a metody spektrálního rozkladu. Na tyto úlohy je možné aplikovat výše popsany zákon hromadění středních chyb, který při odhadu středních chyb vstupních dat umožní určit odhad střední chyby poruchového tíhového potenciálu  $T$ .

## 6.1 Stokesova úloha

Řešení Stokesovy úlohy je popsáno rovnicí (5.65):

$$T(R, \theta, \lambda) = \frac{R}{4\pi} \iint_{\theta_Q, \lambda_Q} \Delta g(R, \theta_Q, \lambda_Q) S(\psi) \sin \theta_Q d\lambda_Q d\theta_Q, \quad (6.4)$$

kde  $R$  je poloměr náhradní koule aproximující geoid,  $\Delta g(R, \theta_Q, \lambda_Q)$  jsou hodnoty tíhové anomálie v bodech na této kouli a  $S(\psi)$  je Stokesova sférická funkce. Protože hodnoty  $\Delta g(R, \theta_Q, \lambda_Q)$  jsou známy pouze lokálně v diskrétních bodech, nahradí se tento integrál konečnou řadou

$$T(R, \theta, \lambda) = \frac{R}{4\pi} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \Delta \bar{g}(R, \theta_i, \lambda_j) S(\psi_{ij}) \sin \theta_i \Delta \lambda \Delta \theta, \quad (6.5)$$

kde  $\Delta \bar{g}(R, \theta_i, \lambda_j)$  je střední hodnota tíhové anomálie pro konkrétní hodnoty úhlů  $\theta_i, \lambda_j$ . Protože úhlové elementy  $\Delta \lambda, \Delta \theta$  popisují element prostorového úhlu  $\Delta \Omega$ , lze zapsat řadu (6.5) ve tvaru součtu přes tyto elementy prostorového úhlu:

$$T(R, \theta, \lambda) = \frac{R}{4\pi} \sum_{i=1}^N \Delta \bar{g}(\Delta \Omega_i) S(\psi_i) \Delta \Omega_i. \quad (6.6)$$

Vztah pro výpočet poruchového tíhového potenciálu  $T$  lze tedy popsat rovnicí

$$\mathbf{t} = \mathbf{A} \mathbf{l}, \quad (6.7)$$

kde  $\mathbf{t}$  je vektor určených hodnot poruchového tíhového potenciálu  $T$ ,  $\mathbf{l}$  je vektor známých hodnot tíhové anomálie  $\Delta \bar{g}$ ,  $\mathbf{A}$  je matice soustavy. Hodnota poruchového tíhového potenciálu v konkrétním bodě je dána vztahem

$$T = \mathbf{a} \cdot \mathbf{l}, \quad (6.8)$$

kde  $\mathbf{a}$  je příslušný řádek matice soustavy  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{l}$  je vektor známých hodnot tíhové anomálie  $\Delta \bar{g}$ . Podle zákona o hromadění chyb je variance  $\sigma_T^2$  poruchového tíhového potenciálu v tomto bodě určena vztahem

$$\sigma_T^2 = \mathbf{a} \Sigma_{\Delta g} \mathbf{a}^T. \quad (6.9)$$

Matice  $\Sigma_{\Delta g}$  je kovarianční matice hodnot  $\Delta \bar{g}(\Delta \Omega_i)$  získaných z tíhových měření. Za předpokladu, že chyby měření jsou nezávislé, matice  $\Sigma_{\Delta g}$  je diagonální. Vektor  $\mathbf{a}$  je určen vztahem

$$\mathbf{a} = \left( \frac{R}{4\pi} S(\psi_1) \Delta\Omega_1, \dots, \frac{R}{4\pi} S(\psi_N) \Delta\Omega_N \right). \quad (6.10)$$

Matice  $\Sigma_{\Delta g}$  je dána vztahem

$$\Sigma_{\Delta g} = \begin{bmatrix} \sigma_{\Delta \bar{g}_1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{\Delta \bar{g}_2}^2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_{\Delta \bar{g}_N}^2 \end{bmatrix}. \quad (6.11)$$

Problémem určení střední chyby poruchového tíhového potenciálu  $T$  pomocí zákona hromadění středních chyb je skutečnost, že u vstupních hodnot  $\Delta \bar{g}(\Delta\Omega_i)$  je těžké odhadnout jejich varianci. Navíc chyby měřených hodnot nejsou nezávislé, tedy matice  $\Sigma_{\Delta g}$  ve skutečnosti není diagonální. Pro sestavení matice  $\Sigma_{\Delta g}$  se někdy používá apriorní jednotková střední chyba  $\sigma_0$ , která je konstantní pro všechny měřené hodnoty. Matice  $\Sigma_{\Delta g}$  je potom určena vztahem

$$\Sigma_{\Delta g} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_0^2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_0^2 \end{bmatrix}. \quad (6.12)$$

## 6.2 Sférické harmonické řady

Při použití metody spektrálního rozkladu je poruchový tíhový potenciál  $T$  v bodě o souřadnicích  $(r, \varphi, \lambda)$  určen součtem sférické harmonické řady

$$T(r, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} (\bar{A}_{n,m}^* \cos m\lambda + \bar{B}_{n,m}^* \sin m\lambda) \bar{P}_{n,m}(\cos \theta), \quad (6.13)$$

kde  $\bar{A}_{n,m}^*$  a  $\bar{B}_{n,m}^*$  jsou plně normované koeficienty získané lineární kombinací plně normovaných Stokesových koeficientů  $\bar{A}_{n,m}$ ,  $\bar{B}_{n,m}$  a koeficientů  $J_n$ . Vzhledem k tomu, že členy pro  $n=0$  a  $n=1$  jsou vzhledem k definici referenčního elipsoidu stejné v řadě pro skutečný tíhový potenciál  $W$  i pro normální tíhový potenciál  $U$ , sčítá se řada pro poruchový tíhový potenciál  $T$  až od členů pro  $n=2$ . Vstupními hodnotami výpočtu poruchového

tíhového potenciálu jsou tedy plně normované koeficienty  $\bar{A}_{n,m}^*$  a  $\bar{B}_{n,m}^*$ , které jsou určeny s příslušnou střední kvadratickou chybou  $\sigma_{\bar{A}_{n,m}^*}^2, \sigma_{\bar{B}_{n,m}^*}^2$ . Tyto chyby jsou ve skutečnosti střední kvadratické chyby koeficientů  $\bar{A}_{n,m}$  a  $\bar{B}_{n,m}$ . Koeficienty  $J_n$  jsou vzhledem k matematickému popisu referenčního elipsoidu a jeho normálního tíhového pole určeny přesně. Střední kvadratické chyby  $\sigma_{\bar{A}_{n,m}^*}^2$  a  $\sigma_{\bar{B}_{n,m}^*}^2$  leží na diagonále kovarianční matice o rozměru  $((n+1)(n+2)-n-5)$ :

$$\Sigma_{\text{koef}} = \begin{bmatrix} \sigma_{\bar{A}_{2,0}^*}^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{\bar{A}_{2,1}^*}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\bar{B}_{2,1}^*}^2 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_{\bar{B}_{N,N}^*}^2 \end{bmatrix}. \quad (6.14)$$

Také v tomto případě se předpokládá, že střední chyby koeficientů jsou nezávislé, tedy matice  $\Sigma_{\text{koef}}$  je diagonální. Variances  $\sigma_{\bar{A}_{n,m}^*}^2, \sigma_{\bar{B}_{n,m}^*}^2$  koeficientů  $\bar{A}_{n,m}^*, \bar{B}_{n,m}^*$  jsou známé. Vztah pro výpočet poruchového tíhového potenciálu  $T$  lze popsat rovnicí

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}\mathbf{k}, \quad (6.15)$$

kde  $\mathbf{t}$  je vektor určovaných hodnot poruchového tíhového potenciálu  $T$ ,  $\mathbf{k}$  je vektor plně normovaných koeficientů  $\bar{A}_{n,m}^*$  a  $\bar{B}_{n,m}^*$ ,  $\mathbf{B}$  je matice soustavy. Hodnota poruchového tíhového potenciálu v konkrétním bodě je dána vztahem

$$T = \mathbf{b} \cdot \mathbf{k}, \quad (6.16)$$

kde  $\mathbf{b}$  je příslušný řádek matice soustavy  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{k}$  je vektor plně normovaných koeficientů  $\bar{A}_{n,m}^*, \bar{B}_{n,m}^*$ . Podle zákona o hromadění chyb je variance  $\sigma_T^2$  poruchového tíhového potenciálu v tomto bodě určena vztahem

$$\sigma_T^2 = \mathbf{b}\Sigma_{\text{koef}}\mathbf{b}^T. \quad (6.17)$$

Vektor  $\mathbf{b}$  má složky

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{GM}{R} \left(\frac{R}{r}\right)^3 P_2(\cos \theta) \\ \frac{GM}{R} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \cos \lambda P_{2,1}(\cos \theta) \\ \frac{GM}{R} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \sin \lambda P_{2,1}(\cos \theta) \\ \dots \\ \frac{GM}{R} \left(\frac{R}{r}\right)^{N+1} \sin N \lambda P_{N,N}(\cos \theta) \end{bmatrix}^T. \quad (6.18)$$

## 7 Závěr

Cílem této práce byl popis základních matematických postupů používaných v geodézii při řešení vybraných parametrů tíhového pole Země. Ačkoli matematické modely popisující řešení za předpokladu ideálních vstupních dat jsou dobře známé a relativně snadno řešitelné, není možné je použít bez dalších úprav. Komplikace, které se při popisu tíhového pole Země a řešení jeho základní hladinové plochy – geoidu – vyskytují, jsou způsobeny především nedokonalostí měřených vstupních dat. Kvůli těmto problémům je nutné hledat takové formy matematických rovnic, které by umožnily aplikaci naměřených dat. V následujícím textu budou uvedeny hlavní problémy, které se při řešení vyskytují.

Největším problémem při popisu tíhového pole Země je neznalost rozložení zemských hmot. Pokud bychom znali hustotu zemských hmot jako funkci polohy a času, bylo by možné určit tíhový potenciál v libovolném bodě výpočtem, např. z Newtonova objemového integrálu. Protože však není možné hustotu zemských hmot určit v každém bodě, je nutné hledat jiná řešení výpočtu tíhového potenciálu.

Základním předpokladem při odvozování všech matematických modelů pro výpočet tíhového potenciálu Země z tíhových dat je skutečnost, že tíhový potenciál  $W$  vně geoidu splňuje Laplaceovu diferenciální rovnici, tj. vně geoidu je harmonickou funkcí. Geoid je ale definován jako střední hladina světových oceánů, probíhající i pod kontinenty. Vně geoidu se tedy vyskytují zemské hmoty a zemská atmosféra. Proto je nutné všechna měření opravit o vlivy těchto hmot, které ale lze jen těžko určit s vyšší přesností. Tento problém nebyl v této práci více diskutován.

Za předpokladu, že tíhový potenciál je vně geoidu harmonickou funkcí, je možné řešit Laplaceovu diferenciální rovnici. Řešení je odvozeno z dostupných dat. Družicově měřená tíhová data jsou známa globálně, což umožňuje popis gravitačního potenciálu harmonickou řadou. Tato řada obsahuje Stokesovy koeficienty, k jejichž analytickému určení by bylo nutné znát globální hodnoty gravitačního potenciálu. Protože gravitační potenciál není znám, je nutné určit Stokesovy koeficienty jiným způsobem, např. z družicových dat. Pokud by byla k dispozici družicová gradiometrická data (mise GOCE), bylo by možné určit Stokesovy koeficienty až do stupně  $n \approx 200$ . Dnes jsou Stokesovy koeficienty určovány z družicovým gravimetrických měření přibližně do stupně  $n = 150$ .

Metodou spektrálního rozkladu lze však určit gravitační potenciál vždy pouze přibližně, neboť není možné určit nekonečně mnoho koeficientů a sečíst nekonečnou řadu. Stupeň aproximace je zde dán počtem členů řady.

Druhou skupinou měřených tíhových dat jsou lokální data, která lze získat pozemní nebo leteckou gravimetrií či gradiometrií. Při tíhovém měření na zemském povrchu je úhlová rychlost rotace měřených bodů nenulová. Tíhový potenciál by tedy nesplňoval Laplaceovu rovnici ani v případě, že by měřená data byla opravena o vliv topografie a atmosféry. Proto se při určování reziduální složky tíhového pole určuje místo skutečného tíhového potenciálu  $W$  pouze poruchový tíhový potenciál  $T$ , u kterého tento problém nenastává.

Budeme opět předpokládat, že poruchový tíhový potenciál je vně geoidu harmonickou funkcí. Z měření na topografii lze získat hodnoty tíhové poruchy či tíhové anomálie, které je možné vyjádřit pomocí poruchového tíhového potenciálu. Tyto hodnoty určují okrajové podmínky v Neumannově (tíhová porucha) a Robinově (tíhová anomálie) okrajové úloze. Aby bylo možné použít je pro okrajovou úlohu na geoidu, je nutné naměřené hodnoty tíhové poruchy, popř. tíhové anomálie nejprve převést z topografie na geoid. Tento převod se nazývá harmonické prodlužování tíhových dat a je popsán vnější Dirichletovou okrajovou úlohou. Řešení této úlohy je známé, problémem je ale hraniční plocha. Hranicí je v tomto případě geoid, jehož průběh není znám. Proto je nutné geoid nahradit jinou plochou, nejčastěji náhradní koulí nebo referenčním elipsoidem.

Pokud nahradíme geoid náhradní koulí, je možné popsat řešení Dirichletovy okrajové úlohy pomocí sférického Abel-Poissonova hraničního integrálu. Zde se objevuje další komplikace, neboť neznámé hodnoty jsou uvnitř integrálu. Je tedy nutné řešit inverzní úlohu. Tato inverzní úloha by nebyla analyticky řešitelná ani v případě, že by tíhová porucha a tíhová anomálie byly popsány spojitou globálně určenou funkcí. Z měření na topografii navíc získáme pouze diskrétní hodnoty obou veličin.

Pokud převedeme Dirichletovou úlohou hodnoty tíhové poruchy či tíhové anomálie na plochu nahrazující geoid, získáme okrajové podmínky pro Neumannovu či Robinovu okrajovou úlohu pro poruchový tíhový potenciál na dané náhradní ploše. Pokud by okrajové hodnoty byly známy kontinuálně po celé náhradní ploše, byl by řešením obou okrajových úloh příslušný Greenův integrál. Jak již ale bylo zmíněno, tíhovou poruchu a tíhovou anomálii známe pouze v diskrétních bodech. Proto je nutné integrál převést na



diskrétní tvar. Poruchový tíhový potenciál v daném bodě potom získáme součtem diskrétních hodnot příslušného integrandu.

Uvedený postup je klasickým dvoukrokovým řešením poruchového tíhového potenciálu. Druhou možností je zobecněné řešení Dirichletovy úlohy. Toto řešení spojuje oba předchozí kroky (převedení tíhových dat z topografie na geoid a následné řešení příslušné okrajové úlohy) do jedné rovnice. I zde je ale třeba provést inverzní výpočet.

Výše popsané problémy vyskytující se při výpočtu geoidu je možné eliminovat použitím Moloděnského metody. Moloděnskij řešil tíhová data přímo na topografii. Není tedy nutné provádět harmonické prodlužování tíhových dat na geoid, při kterém se řeší inverzní úloha. Navíc poruchový tíhový potenciál na topografii splňuje po korekcích souvisejících s vlivem atmosféry Laplaceovu diferenciální rovnici. Moloděnského metoda tedy eliminuje většinu předchozích komplikací. Její nevýhodou je složitá hranice – povrch topografie, který není možné bez dalších oprav nahradit jednodušší plochou. Proto je v této úloze řešení pro poruchový tíhový potenciál popsáno nekonečnou řadou. První člen této řady určuje hodnotu poruchového tíhového potenciálu na kouli, která nahrazuje topografii ve výpočetním bodě. Ostatní členy popisují korekce závislé na členitosti topografie v dané oblasti. Pro rovinné oblasti zemského povrchu je první člen velmi dobrou aproximací poruchového tíhového potenciálu.

Z výše uvedených matematických modelů určování tíhového pole Země vyplývá, že vzhledem k dostupným datům není možné nalézt absolutně přesné řešení. Každé z uvedených řešení obsahuje nějaké aproximace, které způsobí, že nalezené řešení je pouze přibližné. Přesnost řešení závisí na přesnosti měřených tíhových dat a na stupni aproximace. V současnosti existují poměrně přesné modely tíhového pole Země a geoidu, kde jsou geoidální výšky určeny kombinací různých tíhových dat řádově s decimetrovou přesností. V současnosti je snaha o odvození modelu geoidu či kvazigeoidu s centimetrovou přesností. Pak by bylo možné provádět převody elipsoidálních výšek měřených aparaturou GPS na výšky nadmořské reprezentované v ČR výškami normálními (Balt po vyrovnání) v rámci obvyklé geodetické přesnosti.

## Reference

- BJERHAMMAR, A. A new theory of gravimetric geodesy. Stockholm : Report of the Royal Institute of Technology, Geodesy Division, 1963.
- BLAIS, J.A.R. Inversions for gravity information. Přednáškové texty – Satellite Altimetry and Applications (Chapter Nine), University of Calgary [online]. 2006, říjen. Dostupný z <<http://surveying.wb.psu.edu/sur351/normg/normg.htm>>.
- BLAŽEK, R.; SKOŘEPA, Z. Geodézie 30 : Výškopis. 1. vyd. Praha : Vydavatelství ČVUT, 1999. 93 s. 80-01-01598-X.
- BÖLLING, K.; GRAFAREND, E.W. Ellipsoidal spectral properties of the Earth's gravitational potential and its first and second derivatives. Journal of Geodesy, 2005, roč. 79, č. 6-7, s. 300-330.
- DRÁBEK, P.; HOLUBOVÁ, G. Parciální diferenciální rovnice : Úvod do klasické teorie. 1. vyd. Plzeň : Západočeská univerzita, 2001. 177 s. ISBN 80-7082-766-1.
- DRÁBEK, P.; MÍKA, S. Matematická analýza I. 4. vyd. Plzeň : Západočeská univerzita, 1999. 158 s. ISBN 80-7082-558-8.
- DRÁBEK, P.; MÍKA, S. Matematická analýza II. 3. vyd. Plzeň : Západočeská univerzita, 1999. 269 s. ISBN 80-7082-558-8.
- FEI, Z. Refinements of Geodetic Boundary Value Problem Solution. UCGE Reports [online]. 2000, květen. Dostupný z <<http://www.geomatics.ucalgary.ca/research/publications/GradTheses.html>>.
- GAUSS, C.F. Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona durch Beobachtungen am Ramsdenschen Zenithsector. Göttingen : Vanderschoeck und Ruprecht, 1828.

GHILANI, C.D. The Level Ellipsoid. Přednáškové texty - Surveying Engineering, College of Engineering, PennState University [online]. 2004, prosinec.

Dostupný z <<http://surveying.wb.psu.edu/sur351/normg/normg.htm>>.

HEISKANEN, W.A.; MORITZ, H. Physical Geodesy. San Francisco : W.H. Freeman & Co., 1967.

HOTINE, M. Mathematical Geodesy. Washington : ESSA (Environmental Science Services Administration) Monograph 2, US Department of Commerce, 1969.

KELLOGG, O.D. Foundations of potential theory. Berlin : Verlag-Springer, 1929. 384 s.

LISTING, J.B. Über unsere jetzige Kenntnis der Gestalt und Grösse der Erde. Göttingen : Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaft und der Georg-August-Universität 33-98, 1873.

MARTINEC, Z. Boundary-value problems for gravimetric determination of a precise geoid. Heidelberg : Lecture Notes in Earth Sciences 73, Springer-Verlag, 1998.

MOLODENSKIJ, M. S. Basic problems of geodetic gravimetry. Moskva : Trudy TsNIIGAiK 42, Geogezizdat, 1945.

MOLODENSKIJ, M.S.; EREMEEV V.F.; YURKINA M.I. (1960) Methods for study of the external gravitational field and figure of the Earth. 1962. Washington : Translated from Russian by the Israel program for scientific translations, Office of Technical Services, Department of Commerce, 1962.

MORITZ, H. Geodetic Reference System 1980. Bulletin Géodésique, 1984, roč. 58, s. 388-398.

NÁDENÍK, Z. Kulové funkce pro geodézii : Matematická příprava ke studiu knihy W.A. Heiskanen – H. Moritz: Physical Geodesy, 1967. 1. vyd. Zdiaby : Výzkumný ústav geodetický, topografický a kartografický, 2000. 129 s. roč. 46, č. 27. ISBN 80-85881-15-2.

NEWTON, I. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. London, 1687. Přeložil Andrew Motte. 1729.

NOVÁK, P. Evaluation of local gravity field parameters from high resolution and elevation data. *Contributions to Geophysics and Geodesy*, 2006, roč. 36, s. 1-33.

NOVÁK, P. Geoid determination using one-step integration. *Journal of Geodesy*, 2003, roč. 77, s. 193-206.

NOVÁK, P. Harmonické prodlužování tíhových dat. *Přednáškové texty – České vysoké učení technické, Praha*, 2003.

NOVÁK, P. Úvod do tíhového pole Země. *Přednáškové texty – Západočeská univerzita, Plzeň*, 2003.

NOVÁK, P. Vyšší geodézie. *Přednáškové texty – Západočeská univerzita, Plzeň*, 2003.

PICK, M.; PÍCHA, J.; VYSKOČIL, V. Úvod ke studiu tíhového pole Země. 1. vyd. Praha : Academia, 1973. 516 s.

REIF, J. *Metody matematické statistiky*. 2. vyd. Plzeň : Západočeská univerzita, 2004. 287 s. ISBN 80-7043-302-7.

SHEN, W.; NING, J. The Application of GPS Technique in Determining the Earth's Potential Field. *Journal of Global Positioning Systems* [online]. 2005, říjen. roč. 4, č. 1-2, s. 268-276.

Dostupný z <[www.gmat.unsw.edu.au/wang/jgps/v4n12/v4n12p33.pdf](http://www.gmat.unsw.edu.au/wang/jgps/v4n12/v4n12p33.pdf)>.

STOKES, G.G. On the variation of gravity on the surface of the Earth. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 8, 1849. s. 672-695.

ZINDULKA, O. Vektorová pole. Přednáškové texty – Katedra matematiky, Stavební fakulta ČVUT [online]. 1999. Dostupný z <<http://mat.fsv.cvut.cz/zindulka/teaching/Main.pdf>>.

### **Internetové adresy:**

[http://www.esa.int/esaLP/ESAYEK1VMOC\\_LPgoce\\_0.html](http://www.esa.int/esaLP/ESAYEK1VMOC_LPgoce_0.html)

<http://www.gfz-potsdam.de>

<http://www.gis.zcu.cz/studium/gen1/html/index.html>

[http://www.gis.zcu.cz/studium/mk2/multimedialni\\_texty/index.html](http://www.gis.zcu.cz/studium/mk2/multimedialni_texty/index.html)

<http://mathworld.wolfram.com/>

<http://research.kms.dk/~avo/airgrav.html>

<http://en.wikipedia.org>

### **Biografie:**

[http://www.dm.unito.it/sism/m\\_italiani/biografie/tricomi/somigliana.html](http://www.dm.unito.it/sism/m_italiani/biografie/tricomi/somigliana.html)

[http://www.dm.unito.it/sism/m\\_italiani/biografie/tricomi/pizzetti.html](http://www.dm.unito.it/sism/m_italiani/biografie/tricomi/pizzetti.html)

[http://www.infoscience.fr/histoire/biograph/biograph\\_som.html](http://www.infoscience.fr/histoire/biograph/biograph_som.html)

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Newton.html>

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Newton.html>

<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Huygens.html>

<http://www.trieste.com/citta/celebri/marussiant.html>

<http://tau.fesg.tu-muenchen.de/~iapg/web/fame/fame.php>

## Dodatek

### A. Matematické operátory

Mezi základní matematické operátory využívané v této práci patří gradient, divergence, laplacián a rotace. Všechny operátory zde budou uvedeny v kartézských souřadnicích (mathworld.wolfram.com; Zindulka 1999).

*Gradient* skalární funkce  $f$  v bodě určeném průvodičem  $\mathbf{r}$  je vektor, který se značí  $\nabla f(\mathbf{r})$ . Průvodič bodu  $\mathbf{r}$  je určen v kartézských souřadnicích vztahem

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (\text{A.1})$$

kde koeficienty  $x, y, z$  jsou pravoúhlé souřadnice daného bodu. Pro zkrácení zápisu budou následující vztahy uváděny s parametrem  $\mathbf{r}$ , místo parametrů  $(x, y, z)$  (např. místo zápisu  $\nabla f(x, y, z)$  bude uveden zápis  $\nabla f(\mathbf{r})$ ). Gradient je potom definován vztahem:

$$\nabla f(\mathbf{r}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{r})\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{r})\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{r})\mathbf{k}, \quad (\text{A.2})$$

kde  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  jsou jednotkové vektory určující soustavu souřadnic. Místo symbolu  $\nabla$  je možné pro gradient použít označení *grad*. Ačkoli forma zápisu gradientu je závislá na zvolených souřadnicích, gradient je na souřadnicovém systému nezávislý. Vektor gradientu určuje směr, ve kterém se hodnota pole mění nejrychleji, je to směr největší směrové derivace.

Nechť  $\mathbf{F}$  je vektorové pole. Potom je lze rozložit na tři skalární pole, z nichž každé přiřazuje bodu určenému průvodičem  $\mathbf{r}$  jednu souřadnici vektorového pole. Pokud tato skalární pole označíme postupně  $p, q, s$ , můžeme vektorové pole zapsat ve tvaru

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = p(\mathbf{r})\mathbf{i} + q(\mathbf{r})\mathbf{j} + s(\mathbf{r})\mathbf{k}, \quad (\text{A.3})$$

kde  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  jsou jednotkové vektory. Skalární pole definované vztahem

$$\text{div}\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\partial p}{\partial x}(\mathbf{r}) + \frac{\partial q}{\partial y}(\mathbf{r}) + \frac{\partial s}{\partial z}(\mathbf{r}), \quad (\text{A.4})$$

se nazývá *divergence* vektorového pole  $F$ . Divergence stejně jako gradient není závislá na souřadnicovém systému.

Nechť  $F$  je výše uvedené vektorové pole,  $F(\mathbf{r}) = p(\mathbf{r})\mathbf{i} + q(\mathbf{r})\mathbf{j} + s(\mathbf{r})\mathbf{k}$ .

Vektorové pole, definované vztahem

$$\operatorname{rot}F(\mathbf{r}) = \left( \frac{\partial s}{\partial y}(\mathbf{r}) - \frac{\partial q}{\partial z}(\mathbf{r}) \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial p}{\partial z}(\mathbf{r}) - \frac{\partial s}{\partial x}(\mathbf{r}) \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial q}{\partial x}(\mathbf{r}) - \frac{\partial p}{\partial y}(\mathbf{r}) \right) \mathbf{k}, \quad (\text{A.5})$$

se nazývá *rotace* pole  $F$ . Ani rotace nezávisí na souřadnicovém systému.

Skalární pole definované vztahem

$$\Delta f(\mathbf{r}) = \operatorname{div} \nabla f(\mathbf{r}), \quad (\text{A.6})$$

se nazývá *laplacián* skalárního pole  $f$ . Laplacián je tedy divergence gradientu, proto podle definice divergence a gradientu platí

$$\Delta f(\mathbf{r}) = \operatorname{div} \nabla f(\mathbf{r}) = \operatorname{div} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{r})\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{r})\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{r})\mathbf{k} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{r}) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{r}) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\mathbf{r}), \quad (\text{A.7})$$

tedy

$$\Delta f(\mathbf{r}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{r}) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{r}) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\mathbf{r}). \quad (\text{A.8})$$

Pokud je laplacián roven nule, tj.  $\Delta f(\mathbf{r}) = 0$ , nazývá se tento vztah Laplaceova rovnice a skalární pole, která ji splňují, se nazývají harmonická.

Při označení gradientu se využívá symbolu  $\nabla$ , který je možné chápat jako formální vektor

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (\text{A.9})$$

Tento vektor se nazývá *hamiltonián* a čte se *nabla*. Pomocí formálního vektoru  $\nabla$  je možné upravit označení všech výše uvedených operátorů.

- Gradient je možné chápat jako součin vektoru  $\nabla$  a skaláru  $U$ . Vztah

$$\nabla f(\mathbf{r}) = \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) f(\mathbf{r}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{r})\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{r})\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{r})\mathbf{k}, \quad (\text{A.10})$$

vyjadřuje definici gradientu. *Gradient* skalárního pole  $f$  tedy můžeme značit  $\nabla f$ .

- V případě skalárního součinu formálního vektoru  $\nabla$  a vektorového pole  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = p(\mathbf{r})\mathbf{i} + q(\mathbf{r})\mathbf{j} + s(\mathbf{r})\mathbf{k}$  získáme vztah

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (p(\mathbf{r})\mathbf{i} + q(\mathbf{r})\mathbf{j} + s(\mathbf{r})\mathbf{k}) = \frac{\partial p}{\partial x}(\mathbf{r}) + \frac{\partial q}{\partial y}(\mathbf{r}) + \frac{\partial s}{\partial z}(\mathbf{r}), \quad (\text{A.11})$$

což je definice divergence. Proto je možné *divergenci* značit  $\nabla \cdot \mathbf{F}$ .

- Skalárním součinem dvou formálních vektorů  $\nabla$  získáme vztah

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

který se značí  $\nabla^2$ . Součinem skaláru  $\nabla^2$  a skalárního pole  $f$  v bodě určeném průvodičem  $\mathbf{r}$  dostaneme vztah

$$\nabla^2 f(\mathbf{r}) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f(\mathbf{r}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{r}) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{r}) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\mathbf{r}), \quad (\text{A.13})$$

což je definice *laplaciánu*, který se tedy značí  $\nabla^2 f$ .

- Obdobným způsobem lze získat definiční vztah *rotace*, a to vektorovým součinem vektoru  $\nabla$  a vektorového pole  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = p(\mathbf{r})\mathbf{i} + q(\mathbf{r})\mathbf{j} + s(\mathbf{r})\mathbf{k}$ :

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \times (p(\mathbf{r})\mathbf{i} + q(\mathbf{r})\mathbf{j} + s(\mathbf{r})\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ p(\mathbf{r}) & q(\mathbf{r}) & s(\mathbf{r}) \end{vmatrix} = \\ &= \frac{\partial s}{\partial y}(\mathbf{r})\mathbf{i} + \frac{\partial q}{\partial x}(\mathbf{r})\mathbf{k} + \frac{\partial p}{\partial z}(\mathbf{r})\mathbf{j} - \frac{\partial p}{\partial y}(\mathbf{r})\mathbf{k} - \frac{\partial q}{\partial z}(\mathbf{r})\mathbf{i} - \frac{\partial s}{\partial x}(\mathbf{r})\mathbf{j} = \\ &= \left( \frac{\partial s}{\partial y}(\mathbf{r}) - \frac{\partial q}{\partial z}(\mathbf{r}) \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial p}{\partial z}(\mathbf{r}) - \frac{\partial s}{\partial x}(\mathbf{r}) \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial q}{\partial x}(\mathbf{r}) - \frac{\partial p}{\partial y}(\mathbf{r}) \right) \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Z toho důvodu se rotace značí  $\nabla \times \mathbf{F}$ .



- Tensorovým součinem  $\otimes$  dvou formálních vektorů  $\nabla$  lze získat tenzor

$$\begin{aligned} \nabla \otimes \nabla &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \otimes \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \nabla \cdot \nabla^T, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

kteřý obsahuje obecně šest nezávislých diferenciálních prvků. Pokud tenzor  $\nabla \otimes \nabla$  aplikujeme na skalární funkci  $f$ , která splňuje Laplaceovu rovnici, bude tento tenzor obsahovat pouze pět nezávislých prvků.

## B. Harmonické funkce a Laplaceova diferenciální rovnice

V kapitole 3.1.1 je odvozen vztah pro tíhový potenciál  $W$ , který se nazývá Laplaceova diferenciální rovnice<sup>18</sup>:

$$\nabla^2 W(\mathbf{r}) = 0. \quad (\text{B.1})$$

Tento vztah je základní rovnicí v teorii tíhového pole Země. Řešením Laplaceovy diferenciální rovnice jsou funkce, které se nazývají *harmonické*.

Necht' harmonická funkce  $f$  v  $n$ -rozměrném prostoru je funkce  $n$  reálných proměnných, která má na dané množině  $M$  spojitě všechny parciální derivace prvního a druhého řádu. Navíc splňuje Laplaceovu diferenciální rovnici. Pokud budeme uvažovat 3-dimenzionální prostor, lze tuto podmínku zapsat ve tvaru

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0. \quad (\text{B.2})$$

<sup>18</sup> Laplace, Pierre-Simon (1749 – 1827) – francouzský astronom, matematik a fyzik

Tato Laplaceova rovnice je zapsána v kartézských souřadnicích  $(x, y, z)$ . Protože Laplaceův operátor je invariantní vůči posunutí a otáčení, lze jej zapsat také pomocí souřadnic, které je možné posunutí a otáčením získat z kartézských souřadnic (např. sférické souřadnice). Za použití transformačních vztahů mezi kartézskými a sférickými souřadnicemi (viz rov. 2.10) přechází rovnice (B.2) do tvaru

$$\nabla^2 f(r, \theta, \lambda) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} = 0. \quad (\text{B.3})$$

Harmonické funkce splňují následující věty (Drábek a Holubová, 2001):

- *slabý princip maxima*: Nechť  $M$  je souvislá omezená otevřená podmnožina prostoru  $R^N$ . Potom funkce  $f$ , které je harmonická na podmnožině  $M$  a spojitá na  $\bar{M}$ , nabývá svého maxima nebo minima na hranici  $\partial M$ .
- *věta o průměru*: Průměrná hodnota harmonické funkce přes libovolnou sféru je rovna hodnotě této funkce ve středu dané sféry.
- *silný princip maxima*: Tato věta je důsledkem předchozí věty o průměru. Funkce  $f$  harmonická na  $M$  a spojitá na  $\bar{M}$  je buď konstantní v celém uzávěru  $\bar{M}$ , nebo nabývá své extrémní hodnoty na hranici  $\partial M$ .

Řešení Laplaceovy rovnice je jednoznačně určené, pokud je úloha doplněna okrajovými podmínkami, které popisují chování funkce na hranici  $\partial M$ . Laplaceova rovnice s okrajovými podmínkami se nazývá *okrajová úloha*. Existují tři základní typy okrajových podmínek – Dirichletova, Neumannova, Newtonova.

Dirichletova okrajová podmínka určuje hodnotu funkce  $f$  na hranici  $\partial M$ :

$$f(\mathbf{r}) = f_0(\mathbf{r}), \quad (\text{B.4})$$

kde  $\mathbf{r}$  je průvodič bodů ležících na Lipschitzově hranici  $\partial M$ .

Neumannova okrajová podmínka určuje hodnotu derivace funkce ve směru normály k hranici  $\partial M$ :

$$\frac{\partial f}{\partial n}(\mathbf{r}) = f_0(\mathbf{r}), \quad (\text{B.5})$$

kde  $\mathbf{r}$  je průvodič bodů ležících na hranici  $\partial M$ .

Newtonova (Robinova) okrajová podmínka popisuje hodnoty funkce  $f$  na hranici  $\partial M$  pomocí lineární kombinace obou předchozích úloh:

$$A \frac{\partial f}{\partial n}(\mathbf{r}) + B f(\mathbf{r}) = f_0(\mathbf{r}), \quad (\text{B.6})$$

kde  $r$  je průvodič bodů ležících na hranici  $\partial M$ ,  $A$  a  $B$  jsou dané konstanty ( $A^2 + B^2 \neq 0$ ).

Při řešení okrajové úlohy je důležité ověřit, zda je tato úloha korektní. Korektnost úlohy závisí na splnění následujících podmínek:

- existence řešení
- jednoznačnost řešení
- stabilita řešení

Pokud jsou všechny tři podmínky splněny, tj. existuje řešení, které je stabilní a jednoznačně určené, potom je okrajová úloha korektní.

### C. Legendreovy funkce

V teorii potenciálu se uplatňují funkce, které se nazývají Legendreovy přidružené funkce prvního druhu  $P_{nk}$  a druhého druhu  $Q_{nk}$  stupně  $n$  a řádu  $k$ . Tyto funkce tvoří na intervalu  $(-1,1)$  fundamentální systém zobecněné Legendreovy rovnice (Nádeník 2000)

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[ n(n+1) - \frac{k^2}{1-x^2} \right] y = 0. \quad (\text{C.1})$$

Obecné řešení této rovnice lze tedy zapsat ve tvaru

$$c_1 P_{nk}(x) + c_2 Q_{nk}(x), \quad (\text{C.2})$$

kde  $c_1$  a  $c_2$  jsou konstantní koeficienty.

Legendreovy přidružené funkce prvního druhu  $P_{nk}(x)$ <sup>19</sup> jsou definovány na intervalu  $\langle -1,1 \rangle$  vztahem (Nádeník 2000)

$$P_{nk}(x) = (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^k P_n(x)}{dx^k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (\text{C.3})$$

Legendreovy přidružené funkce druhého druhu  $Q_{nk}(x)$  jsou na intervalu  $\langle -1,1 \rangle$  definovány vztahem (Nádeník 2000)

$$Q_{nk}(x) = (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^k Q_n(x)}{dx^k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{C.4})$$

---

<sup>19</sup> Legendreovy přidružené funkce prvního druhu  $P_{nk}(x)$  se též nazývají Legendreovy funkce řádu  $k$ , přidružené k Legendreovu polynomu stupně  $n$ .

Definice má smysl pouze pro  $n \geq k$ , neboť v případě  $k > n$  by  $k$ -tá derivace polynomu stupně  $n$  byla rovna nule. V definicích se vyskytují funkce  $P_n(x)$  a  $Q_n(x)$ , které jsou speciálním případem funkcí  $P_{nk}(x)$  a  $Q_{nk}(x)$ , neboť speciálně pro  $k = 0$  platí

$$P_{n0}(x) = P_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{C.5})$$

$$Q_{n0}(x) = Q_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{C.6})$$

Funkce  $P_n(x)$  a  $Q_n(x)$  se nazývají Legendreovy polynomy prvního a druhého druhu a za předpokladu, že  $\frac{d^0 f}{dx^0} = f$  a  $0! = 1$ , je lze definovat následujícími vztahy (Nádeník 2000):

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{C.7})$$

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} P_n(x) \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - P_n(x) \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{x - \nu_i}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{C.8})$$

kde  $\nu_i$  je  $i$ -tý kořen Legendreova polynomu  $P_n(x)$ ,  $B_i$  jsou konstantní koeficienty, které lze určit ze vztahu

$$\frac{1}{(1-x^2)P_n^2(x)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+x} + \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{(x-\nu_i)^2}. \quad (\text{C.9})$$

Legendreovy polynomy prvního a druhého druhu tvoří fundamentální systém Legendreovy diferenciální rovnice

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0. \quad (\text{C.10})$$

Legendreovy polynomy prvního druhu  $P_n(x)$  splňují následující vlastnosti (Nádeník 2000):

- pokud je  $n$  sudé (liché),  $P_n(x)$  je sudý (lichý) polynom stupně  $n$
- $P_n(1) = 1, P_n(-1) = (-1)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $P_n(x)$  má na intervalu  $(-1, 1)$   $n$  různých reálných kořenů
- pokud  $n \neq 0$ , potom na intervalu  $(-1, 1)$  platí  $|P_n(x)| < 1$
- na uzavřeném intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$  jsou Legendreovy polynomy ortogonální, tj. platí

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0, \quad m \neq n, \quad (\text{C.11})$$

- normu Legendreova polynomu, definovanou vztahem

$$\|P_n(x)\| = \sqrt{\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx}, \quad (\text{C.12})$$

Lze určit takto:

$$\|P_n(x)\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}. \quad (\text{C.13})$$

Přidružené Legendreovy funkce různých stupňů  $m, n$  a stejného řádu  $k$  ( $0 < k \leq \min(m, n)$ ) jsou na intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$  ortogonální, tj. splňují podmínku

$$\int_{-1}^1 P_{mk}(x) P_{nk}(x) dx = 0, \quad m \neq n; \quad k = 0, 1, 2, \dots, \min(m, n). \quad (\text{C.14})$$

Pro výpočet normy přidružené Legendreovy funkce platí vztah

$$\|P_{nk}(x)\| = \sqrt{\frac{(n+k)!}{(n-k)!} \frac{2}{2n+1}}. \quad (\text{C.15})$$

Přidružené Legendreovy funkce prvního a druhého druhu jsou významné v teorii potenciálu, neboť se využívají při řešení tíhového potenciálu metodou spektrálního rozkladu.

## D. Newtonův objemový integrál

Podle Newtonova gravitačního zákona (Newton 1687) se každé dva hmotné body přitahují gravitační silou o velikosti

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (\text{D.1})$$

kde  $G$  je univerzální gravitační konstanta ( $G = 6,672 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ ),  $m_1, m_2$  jsou hmotnosti daných bodů,  $r$  je prostorová vzdálenost těchto bodů. Pokud vynásobíme velikost výsledné síly  $F$  jednotkovým vektorem spojnice daných bodů, získáme vektorový tvar gravitačního zákona:

$$\mathbf{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}. \quad (\text{D.2})$$

Nechť existuje  $n$  hmotných bodů o souřadnicích  $(x_i, y_i, z_i)$  a hmotnostech  $m_i$ . Budeme určovat potenciál  $V$  v hmotném bodě  $P$  o souřadnicích  $(x, y, z)$  a hmotnosti  $m_p$ . Kvadráty vzdáleností bodů o souřadnicích  $(x_i, y_i, z_i)$  od bodu  $P$  jsou dány rovnicí

$$r_i^2 = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2. \quad (\text{D.3})$$

Podle Newtonova gravitačního zákona jsou body  $P$  a bod o hmotnosti  $m_i$  přitahovány silou

$$\mathbf{F}_i = G \frac{m_p m_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i. \quad (\text{D.4})$$

Výsledná síla  $\mathbf{F}$  je vektorovým součtem jednotlivých sil  $\mathbf{F}_i$ , tj.

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n G \frac{m_p m_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i = G \sum_{i=1}^n \frac{m_p m_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i. \quad (\text{D.5})$$

Za předpokladu  $m_p = 1$  platí pro složky  $F_x, F_y, F_z$  výsledné síly  $\mathbf{F}$  ve směru souřadnicových os  $x, y, z$

$$\begin{aligned} F_x &= G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i^3} (x_i - x), \\ F_y &= G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i^3} (y_i - y), \\ F_z &= G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i^3} (z_i - z). \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Vektorové pole popsané složkami  $F_x, F_y, F_z$  lze zapsat jako gradient skalárního pole, tj.

$$\mathbf{F} = \nabla V, \quad (\text{D.7})$$

kde  $V(x, y, z)$  je gravitační potenciál. Potom jsou složky  $F_x, F_y, F_z$  parciálními derivacemi potenciálu  $V(x, y, z)$  ve směru os  $x, y, z$ , tj.  $F_x = \frac{\partial V}{\partial x}, F_y = \frac{\partial V}{\partial y}, F_z = \frac{\partial V}{\partial z}$ .

Potenciál  $V(x, y, z)$  je tedy určen vztahem (Pick, Pícha, Vyskočil 1973)

$$V = G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i}. \quad (\text{D.8})$$

Nyní uvažujeme pevné těleso  $B$  o hmotnosti  $m$ , které rozdělíme na elementární částice hmotnosti  $dm_i$ . Protože dané těleso nemusí být homogenní, je element hmotnosti

funkcí hustoty v těžišti konkrétního elementárního objemu o souřadnicích  $x_i, y_i, z_i$ , které určují průvodič bodu  $\mathbf{r}_i$ :

$$dm_i(\mathbf{r}_i) = \rho(\mathbf{r}_i) dB(\mathbf{r}_i), \quad (\text{D.9})$$

kde  $dB$  je elementární objem celkové hmoty tělesa  $B$ ,  $\rho(\mathbf{r}_i)$  je hustota v těžišti objemového elementu  $dB$ ,  $\mathbf{r}_i$  je průvodič těžiště objemového elementu  $dB$ . Aby bylo možné určit potenciál ve vnějším bodě  $P$  tělesa  $B$ , musíme znát nejdříve gravitační účinek tělesa  $B$  v tomto bodě. Pokud budeme předpokládat, že hmoty  $dm_i$  jsou soustředěny do příslušných těžišť objemových elementů  $dB$ , můžeme složky výsledné gravitační síly  $F$  v bodě  $P$  určit jako součet účinků elementárních hmot  $dm_i$  (Pick, Pícha, Vyskočil 1973):

$$\begin{aligned} F_x &= G \iiint_B \frac{\rho(\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|^3} (x_i - x) dB(\mathbf{r}_i), \\ F_y &= G \iiint_B \frac{\rho(\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|^3} (y_i - y) dB(\mathbf{r}_i), \\ F_z &= G \iiint_B \frac{\rho(\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|^3} (z_i - z) dB(\mathbf{r}_i), \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

kde  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|$  je Eukleidovská vzdálenost bodu  $P$  a příslušného integračního bodu,  $x, y, z$  jsou souřadnice průvodiče  $\mathbf{r}$  bodu  $P$ ,  $x_i, y_i, z_i$  jsou souřadnice průvodiče  $\mathbf{r}_i$  integračních bodů. Pro gravitační potenciál  $V$  v bodě  $P$  platí vztah (Pick, Pícha, Vyskočil 1973)

$$V(\mathbf{r}) = G \iiint_B \frac{\rho(\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|} dB(\mathbf{r}_i), \quad (\text{D.11})$$

který se nazývá Newtonův objemový integrál.

Protože funkce  $\frac{1}{r}$  je spojitá na intervalu  $(0, \infty)$ , stejně jako její první derivace, je možné provést záměnu limitování a integrování, tj.

$$\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} V(\mathbf{r}) = \lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} G \iiint_B \frac{\rho(\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|} dB(\mathbf{r}_i) = G \iiint_B \lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} \frac{\rho(\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|} dB(\mathbf{r}_i) = 0. \quad (\text{D.12})$$

Newtonův objemový integrál je tedy pro  $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$  roven 0.

Tento výsledek je ale platný pouze v případě, že uvedené úpravy bylo možno korektně provést. Výraz pro výpočet potenciálu  $V$  byl určen integrací svých parciálních derivací, proto je nutné, aby tyto derivace existovaly. Výraz

$$V(\mathbf{r}) = G \iiint_B \frac{\rho(\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|} dB(\mathbf{r}_i), \quad (\text{D.13})$$

je možné derivovat podle souřadnic vektoru  $\mathbf{r}$ , jestliže funkce  $\rho(\mathbf{r}_i)$  je v oblasti B ohraničená a integrovatelná a integrační jádro  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|$  má v oblasti B spojité parciální derivace podle svých parametrů  $x, y, z, x_i, y_i, z_i$ .



